Studiewijzer Differentiaalvergelijkingen

Zorg dat je elke les je spullen (boek, schrift en uitwerkingen) bij je hebt.
Bij eventueel lesuitval dien je je te houden aan de studiewijzer.

Les	Datum	Stof	Sommen die aan het begin van de les af moeten zijn.
1	Maandag 25 maart	Dynamische modellen	**Eindopdracht inleveren**
2	Woensdag 27 maart	Dynamische modellen en asymptoten	1, 2, 4 -7
3	Woensdag 27 maart	Lijnelementenvelden	8, 11, 13-15
	Donderdag 28	*Witte donderdag*	
	Vrijdag 29 maart	*Goede vrijdag*	
	Maandag 1 april	*Tweede paasdag*	
4	Woensdag 3 april	Tekenoverzichten	16, 17, 20 **Inleveren bonusopdracht (max 1 heel punt bonus voor cijfer toets)**
5	Woensdag 3 april	Oplossing aantonen	26, 27, 29, 30
6	Donderdag 4 april	Scheiden variabelen	32-35, 37
7	Vrijdag 5 april	Afmaken hoofdstuk/ beginnen D-toets	38, 39, 40bcd, 41, 42
8	Maandag 8 april	Herhaling/vragen stellen	D-toets, vragen bedenken
9	Woensdag 10 april	Start Hoofdstuk 11 (Goniometrie)	
10	Donderdag 11 april	**Toets differentiaalvergelijkingen**	

Introductie Praktische Opdracht Scy Dynamics

In de komende week gaan we werken met het programma Scy Dynamics. Met behulp van dit programma kan van een natuurverschijnsel een dynamisch model gemaakt (en doorgerekend) worden. In deze eerste opdracht kijken we naar een (eenvoudig) dynamisch model voor een lekkend zwembad.

De opdrachten in deze hand-out maak je in schrift. Je antwoorden worden aan het begin van de volgende les gecontroleerd door een van de aanwezige docenten. Mocht je de opgaven niet tijdens de les afkrijgen, dan moet je het thuis afmaken.

In totaal bestaat deze introductie uit 8 opdrachten.

Deze opdracht zal na deze les zijn terug te vinden op ELO.

Het programma SCY Dynamics kan je op de volgende website vinden: http://www.scy-net.eu/scydynamics
Om de applet te kunnen gebruiken heb je Java nodig op de computer! Als het programma niet werkt moet je dit installeren. (ga naar http://www.java.com/nl/ en klik op 'gratis Java-download', klik op 'ga akkoord met… en start de gratis download', download en installeer het vervolgens op de computer).

Soms geeft het programma bij de eerste keer een error, een tweede maal het programma opstarten werkt dan meestal. Zo niet, controleer dan of je de nieuwste versie van Java hebt door het te installeren.

Deze opdracht zal na deze les zijn terug te vinden op ELO.

Het dynamische model van het lekkende zwembad is als standaard voorbeeld te vinden in het programma (in het menu "examples", "Leaking Bucket").

Sla het model (aan het begin, tussendoor en aan het eind) op een USB-stick op en/of mail het naar jezelf! Als je dit niet doet ben je na de les (of als je computer crasht) alles kwijt!

Les 1 - Het lekkende zwembad (the leaking bucket)

In de les hebben we een formule opgesteld die de verandering van het waterniveau in het zwembad beschrijft. Gezamenlijk zijn we uitgekomen op de volgende formule.

$\frac{dW}{dt} = k \quad g \cdot W$ (1) De formule

W Aantal liter dat in het zwembad zit.

k Aantal liter dat per uur door de kraan in het zwembad stroomt.

g Ratio van het water dat uit het gat in het zwembad loopt per uur.

Yvonne en Peter geven een examenfeest bij Yvonne thuis. Haar ouders hebben een zwembad en dus willen ze een zwemfeest houden. Het zwembad heeft een inhoud van 45000 liter. Twee dagen voor het feest merken Peter en Yvonne dat het waterpeil wel erg laag is. Ze schatten dat er nog maar zo'n 25000 liter water in het zwembad zit. Al gauw komen ze er achter dat er een gat in de bodem van het zwembad zit. Er is echter te weinig tijd om het zwembad leeg te laten lopen, het gat te dichten en het zwembad weer te vullen. Daarom besluiten zij om te meten hoeveel water er per uur uit het zwembad wegsijpelt. Na zes uur grove metingen te hebben gedaan kwamen zij op de volgende resultaten uit:

Meet Tijd	12.00	13.00	14.00	15.00	16.00	17.00	18.00
Inhoud (L)	25000	24750	24500	24252,50	24007,50	23764,98	23524,90

1) Bepaal aan de hand van bovenstaande tabel hoeveel procent van het water er per uur uit het zwembad weglekt. Rond af op gehele procenten.

Gebruik voor de rest van deze opdracht de gevonden waarde voor g.
Wanneer je bij opdracht 1) er niet uit bent gekomen, neem dan de waarde g = 0,02.

2) Het feest begint twee dagen later om 12.00 's middags. Bepaal met behulp van de tabel in Scy Dynamics hoeveel liter water er op dat moment nog in het zwembad is. Rond af op hele liters.

Om toch een zwemfeest te kunnen geven besluiten Yvonne en Peter het zwembad bij te vullen. Ze leggen de tuinslang in het zwembad en zetten de kraan open. Per uur stroomt er 600 liter water uit de kraan.

3) Bepaal met hulp van Scy Dynamics na hoeveel uur het zwembad overstroomt.

4) Hoeveel water zou er per uur uit de kraan moeten komen, zodat het zwembad (precies op tijd voor het feest) weer vol is? Doe dit door de waterinstroom te variëren.

Zie de volgende pagina voor de laatste vragen!

Model run	
Start time	0.0
Stop time	1000
Time step	0.1

5) Gebruik bovenstaande instellingen en vul met behulp van de grafiekfunctie van SCY Dynamics de volgende tabel in.

Waterinstroom	50	150	250	350	450	550	650	750
Inhoud (L) op t=1000								

6) Wat valt je op in bovenstaande tabel?

7) Verklaar het bovenstaande resultaat met behulp van de formule (1).

8) Leg je resultaten van vraag 6 en 7 uit met betrekking tot de context.

Praktische Opdracht Scy Dynamics

De opdrachten in deze hand-out maak je in je schrift. Je antwoorden worden aan het begin van de volgende les gecontroleerd door een van de aanwezige docenten. Mocht je de opgaven niet tijdens de les afkrijgen, dan moet je het thuis afmaken.

In totaal bestaat deze introductie uit 8 opdrachten.

Het programma SCY Dynamics kan je op de volgende website vinden: http://www.scy-net.eu/scydynamics
Om de applet te kunnen gebruiken heb je Java nodig op de computer! Als het programma niet werkt moet je dit installeren. (ga naar http://www.java.com/nl/ , klik op 'gratis Java-download', klik op 'ga akkoord met… en start de gratis download', download en installeer het vervolgens op de computer).

Soms geeft het programma bij de eerste keer een error, een tweede maal het programma opstarten werkt dan meestal. Zo niet, controleer dan of je de nieuwste versie van Java hebt door het te installeren.

Deze opdracht zal na deze les zijn terug te vinden op ELO.

Sla het model (aan het begin, tussendoor en aan het eind) op een USB-stick op en/of mail het naar jezelf! Als je dit niet doet ben je na de les (of als je computer crasht) alles kwijt!

Les 2 - Het ZG model (SI model)

In de les hebben we een tweetal vergelijkingen opgesteld die een ziekteproces beschrijven. Gezamenlijk zijn we uitgekomen op de volgende vergelijkingen.

$$\frac{dG}{dt} = -\gamma ZG + \beta Z$$
$$\frac{dZ}{dt} = \gamma ZG - \beta Z$$

G: aantal gezonde mensen
Z: aantal zieke mensen
γ : overdragingsratio: percentage van gezonde mensen die in aanraking komen met zieke mensen, en vervolgens zelf ook ziek worden.
β : herstellingsratio: percentage van aantal zieke mensen die weer gezond worden.

We beginnen gelijk met het bouwen van het dynamische model dat we hebben besproken. Verwerk bovenstaande vergelijkingen in Scy Dynamics door de volgende stappen te nemen.

Het opbouwen van het dynamische model.

- Creëer allereerst voor iedere variabele (Ziek, Gezond) apart een stock-object. Neem hierbij als beginwaarden Ziek = 50, Gezond =1500.
- Voeg de objecten voor de constanten β en γ toe. Neem β = 0.04 en γ = 0.
- Voeg vervolgens de objecten voor vergelijkingen in.
- Voer nu de vergelijkingen in de juiste objecten in.
- Koppel nu de juiste objecten aan elkaar.
- **Als je klaar bent met het bouwen van het model, laat dit dan aan een van de begeleiders zien.**
- Sla het model op een USB-stick op en/of mail het naar jezelf! Als je dit niet doet ben je na de les (of als je computer crasht) alles kwijt!

1) Wat betekent het (in de context) dat *γ* gelijk is aan 0?

2) Kijk met de grafiek functie van SCY Dynamics naar het verloop van het aantal zieken en het aantal gezonde mensen. Verklaar wat je ziet.

3) Neem nu β = 0 en γ = 0.0005. Wat betekent het (in de context) dat β gelijk is aan 0?

4) Leg uit wat de vorm van de grafieken, voor de zieken en de gezonde mensen, betekent in de context.

5) Neem nu β en γ gelijk aan elkaar (β = 0.0005 en γ = 0.0005). Vul dit in de vergelijkingen in en ontbind in factoren.

6) Voor welk aantal zieke en gezonde mensen zijn de afgeleiden gelijk aan 0? Wat betekent dit in de context?

Het variëren van één van de parameters (terwijl je de andere parameters constant houdt) en de resultaten interpreteren noemen we een parameteranalyse. Door middel van parameteranalyses kan je een hoop leren over het gedrag van het ziekteverloop.

Neem voor vraag 7 de volgende waarden

Model run	
Start time	0.0
Stop time	5000.0
Time step	0.1

7) Neem nu γ = 0.000005. Kies nu zelf 3 waarden voor β tussen de 0.0001 en de 0.05 die verschillende grafieken laten zien. <u>Teken deze grafieken in je schrift</u> en omschrijf wat de drie verschillende grafieken betekenen in de context. (Schrijf wel op welke waarden voor β je hebt gebruikt!)

8) Op dit moment staan er in het dynamische model alleen gezonde en zieke mensen. Noem drie mogelijke toevoegingen aan het dynamische model waardoor het model realistischer wordt.

Les 3 - Het ZGR model (SIR model)

De opdrachten in deze hand-out maak je in je schrift. Je antwoorden worden aan het begin van de volgende les gecontroleerd door een van de aanwezige docenten. Mocht je de opgaven niet tijdens de les afkrijgen, dan moet je het thuis afmaken.

In totaal bestaat deze introductie uit 9 opdrachten.

Het programma SCY Dynamics kan je op de volgende website vinden: http://www.scy-net.eu/scydynamics
Om de applet te kunnen gebruiken heb je Java nodig op de computer! Als het programma niet werkt moet je dit installeren. (ga naar http://www.java.com/nl/ en klik op 'gratis Java-download', klik op 'ga akkoord met… en start de gratis download', download en installeer het vervolgens op de computer).

Soms geeft het programma bij de eerste keer een error, een tweede maal het programma opstarten werkt dan meestal. Zo niet, controleer dan of je de nieuwste versie van Java hebt door het te installeren.

Deze opdracht zal na deze les zijn terug te vinden op ELO.

Sla het model (aan het begin, tussendoor en aan het eind) op een USB-stick op en/of mail het naar jezelf! Als je dit niet doet ben je na de les (of als je computer crasht) alles kwijt!

Het volgende wat we gaan doen is het dynamische model uitbreiden door mee te nemen dat mensen resistent kunnen worden.

1) Omschrijf in woorden wanneer mensen resistent worden voor een ziekte.

Wat we vanaf nu aannemen is dat mensen alleen resistent worden als ze ziek zijn geweest. Iedereen die ziek is geweest wordt resistent.

2) Hoe verandert de vergelijking voor de gezonde mensen van het dynamische ZG model met deze uitbreiding?

3) Hoe verandert de vergelijking voor de zieke mensen van het dynamische ZG model met deze uitbreiding?

4) Voor de nieuwe groep (Resistente) mensen moet een vergelijking worden opgesteld, namelijk voor $\frac{dR}{dt}$. Met behulp van je antwoorden op de vorige twee vragen, wat zou deze vergelijking moeten zijn?

5) Schrijf de drie vergelijkingen van het nieuwe dynamische model onder elkaar op in je schrift en **laat deze controleren voor je verder gaat!**

$$\frac{dG}{dt} =$$

$$\frac{dZ}{dt} =$$

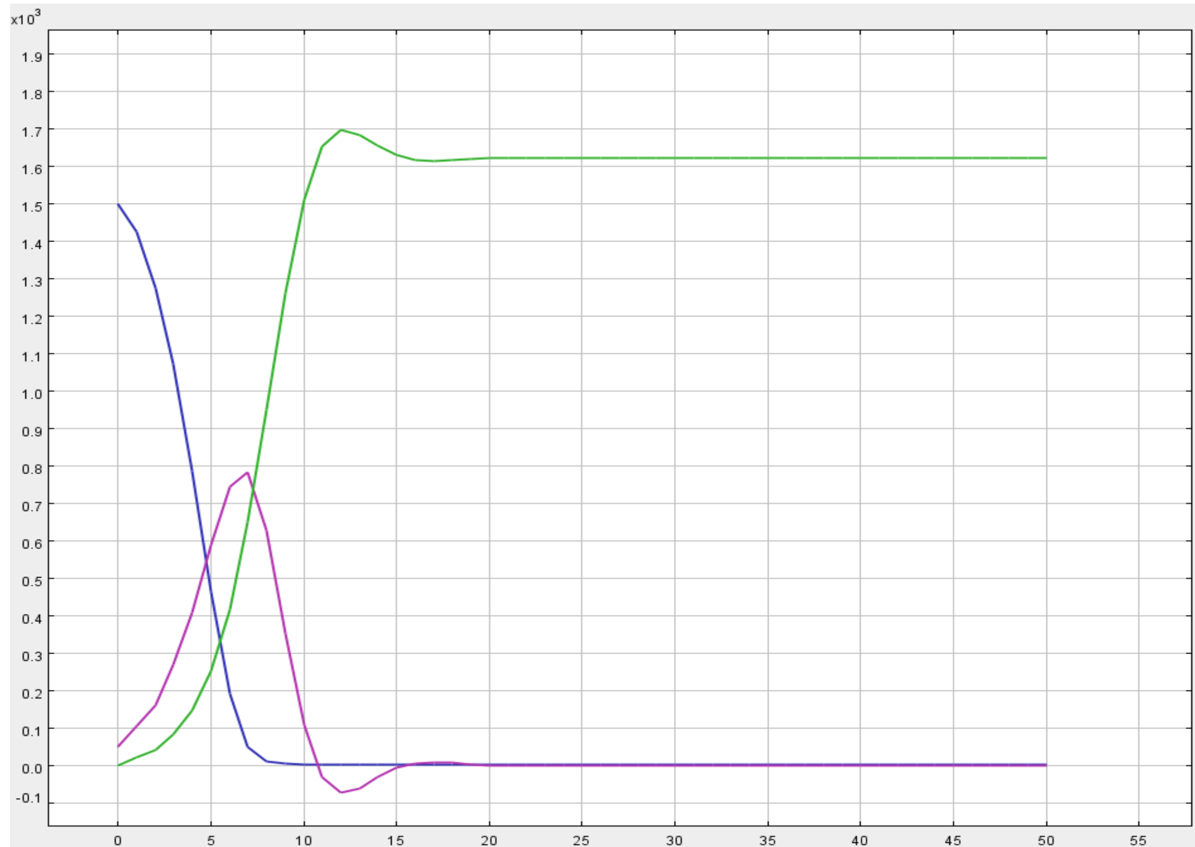
$$\frac{dR}{dt} =$$

Het opbouwen van het model met resistentie.

- Creëer allereerst voor iedere variabele (Ziek, Gezond, Resistent) apart een stock-object. Neem hierbij als beginwaarden Ziek = 50, Gezond =1500, Resistent = 0.
- Voeg de objecten voor de constanten β en γ toe. Neem β = 0,04, γ = 0.
- Voeg vervolgens de objecten voor vergelijkingen in.
- Voer nu de vergelijkingen in de juiste objecten in.
- Koppel nu de juiste objecten aan elkaar.
- **Als je klaar bent met het bouwen van het model, laat dit dan aan een van de begeleiders zien.**
- <u>Sla het model op een USB-stick op en/of mail het naar jezelf! Als je dit niet doet ben je na de les (of als je computer crasht) alles kwijt!</u>

6) Kijk met de grafiek functie van SCY Dynamics naar het verloop van het aantal zieken en het aantal gezonde mensen. Beschrijf het verloop van de functies met betrekking tot de context.

We gaan nu weer een kleine parameteranalyse uitvoeren. De volgende grafiek is verkregen met Scy Dynamics.



7) Beschrijf het verloop van de functies in het plaatje met betrekking tot de context. Leg hierbij ook uit of de oplossing realistisch is of niet.

Neem vanaf nu de volgende waarden voor de tijd

Model run

Start time	0.0
Stop time	5000.0
Time step	0.1

8) Vul voor γ de waarde 0.000005 in. Neem nu voor β dezelfde waarden als bij opdracht 7 in het dynamische ZG model uit de vorige les. Teken deze grafieken in je schrift en omschrijf wat de drie verschillende grafieken betekenen in de context. (Schrijf wel op welke waarden voor β je hebt gebruikt!)

9) Vergelijk deze grafieken met de grafieken uit opdracht 7 van de vorige les. Wat voor verschil zie je in de grafieken van het ziekteverloop? Leg dit uit met betrekking tot de context

Les 4 & 5 - Het ZGR+ model (SIR+ model)

De opdrachten in deze hand-out maak je in je schrift. Je antwoorden worden aan het begin van de volgende les gecontroleerd door een van de aanwezige docenten. Mocht je de opgaven niet tijdens de les afkrijgen, dan moet je het thuis afmaken.

In totaal bestaat deze worksheet uit 10 opdrachten.

Het programma SCY Dynamics kan je op de volgende website vinden: http://www.scy-net.eu/scydynamics
Om de applet te kunnen gebruiken heb je Java nodig op de computer! Als het programma niet werkt moet je dit installeren. (ga naar http://www.java.com/nl/ , klik op ‘gratis Java-download’, klik op ‘ga akkoord met… en start de gratis download’, download en installeer het vervolgens op de computer).

Soms geeft het programma bij de eerste keer een error, een tweede maal het programma opstarten werkt dan meestal. Zo niet, controleer dan of je de nieuwste versie van Java hebt door het te installeren.

Deze opdracht zal na deze les zijn terug te vinden op ELO.

Sla het model (aan het begin, tussendoor en aan het eind) op een USB-stick op en/of mail het naar jezelf! Als je dit niet doet ben je na de les (of als je computer crasht) alles kwijt!

Verwerk alle opdrachten van deze les in een verslag. Dit verslag moet minstens de volgende punten bevatten:

- Voorblad
- Inleiding met probleembeschrijving
- Uitwerkingen van de opdrachten (Voeg ook een afbeelding van het dynamische model toe aan het verslag!)
- Reflectie

Zie ook het eind van dit document voor de beoordelingscriteria.

Het verslag moet **aan het begin van de les op maandag 25 maart** op papier worden ingeleverd.

De overheid wil een realistischer beeld krijgen van het verloop van een griepepidemie. Het Nivel wordt hier voor gecontacteerd en vraagt aan jullie om het dynamische model uit te breiden. Deze tweede uitbreiding moeten jullie echter zelf bedenken. Over de uiteindelijke resultaten wil men een verslag ontvangen.

In dit verslag moeten al jullie overwegingen, genomen stappen en resultaten worden beschreven en bediscussieerd. Ook een beschrijving van hoe het dynamische model is gebouwd met behulp van Scy Dynamics moet in het verslag worden opgenomen. Reflecteer aan het eind van het verslag op wat jullie met deze opdrachten geleerd hebben en beschrijf hoe het samenwerken verliep.

Zie voor meer uitleg over de beoordeling van dit project de bijgevoegde beoordelingscriteria.

1) Noem drie mogelijke uitbreidingen op het dynamische ZGR model en beschrijf wat iedere uitbreiding inhoud in de context.

2) Wat voor aannames maak je bij elke uitbreiding?

Kies nu een van de mogelijke uitbreidingen om te gaan toevoegen aan het dynamische model.

3) Wat is het effect van deze uitbreiding op de vergelijking van de gezonde mensen?

4) Wat is het effect van deze uitbreiding op de vergelijking van de zieke mensen?

5) Wat is het effect van deze uitbreiding op de vergelijking van de resistente mensen?

6) Schrijf de vergelijkingen van het nieuwe dynamische model onder elkaar op en **laat deze controleren voor je verder gaat!**

$$\frac{dG}{dt} = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$\frac{dZ}{dt} = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$\frac{dR}{dt} = \underline{\hspace{10cm}}$$

…

Het opbouwen van het model met een eigen uitbreiding.

- Open het vorige model (ZGR) en sla het op als ZGR+
- Modelleer nu je eigen uitbreiding in het programma en kies hierbij zelf een waarde voor de nieuw toegevoegde parameter(s) en/of variabelen.
- **Als je klaar bent met het bouwen van het model, laat dit dan aan een van de begeleiders zien.**
- <u>Sla het model op een USB-stick op en/of mail het naar jezelf! Als je dit niet doet ben je na de les (of als je computer crasht) alles kwijt!</u>

7) Bouw het model in Scy Dynamics.

Als eerste tijdstap beginnen we met een kleine tijdschaal. Verwerk onderstaande gegevens in het model.

Model run	
Start time	0.0
Stop time	100.0
Time step	0.1

Neem allereerst β = 0.04 en γ = 0.00005.

8) Vermeld de door jullie gekozen waarde(n) voor de parameter(s). Zijn de door jullie gekozen waarden realistisch? Waarom of waarom niet?

9) Voer een parameteranalyse uit voor elk van de nieuw toegevoegde parameters. Leg hierbij uit welke resultaten realistisch zijn (sla de grafieken op om ze later in het verslag te verwerken!). Leg ook uit wat de resultaten betekenen in de context. Wat lijkt jullie een mogelijk scenario?
<u>Het doel van deze opdracht was om het dynamische model realistischer te maken, dus moeten we kijken of er met het model realistische oplossingen verkregen kunnen worden.</u> Hiervoor moeten de resultaten van het dynamische model vergeleken worden met een echt griepverloop. Met behulp van internet is onderstaande grafiek van het aantal zieke mensen in het jaar 2009-2010 gemaakt.



10) Voor welke waarden van de parameters kan zo een soort grafiek (voor de zieke mensen!) verkregen worden? Sla de grafieken weer op voor in het verslag. Leg hierbij uit of de parameters realistisch zijn ("90% van de bevolking is ziek" is niet erg realistisch!).

Beoordelingscriteria Praktische Opdracht Differentiaalvergelijkingen

	Onvoldoende	Voldoende	Goed	Uitstekend	Max. punten
Probleembeschrijving	Er is niet omschreven wat het doel is.	Het doel is letterlijk overgenomen uit de opdracht.	Het doel is in eigen woorden geformuleerd	… en waarom er een nieuw model nodig is.	1
Uitwerking opdrachten 1 - 10	Opdrachten zijn niet of niet volledig uitgewerkt.	Opdrachten uitgewerkt en letterlijk opgenomen in het verslag.	Opdrachten zijn zo volledig mogelijk uitgewerkt en vormen een geheel dat te begrijpen is zonder dat je de opdrachten kent.	Opdrachten zijn zodanig verwerkt in het verslag dat ze niet meer als opdrachten te herkennen zijn: Het is een vloeiend geheel.	3
Modellen bouwen	Het model is erg onoverzichtelijk. Het is niet snel te zien welke pijl naar welk object gaat. Uitleg modelbouwproces ontbreekt.	Model is enigszins overzichtelijk en het modelbouwproces is in globale lijnen omschreven.	Model is overzichtelijk en het modelbouwproces is in globale lijnen omschreven.	Model is overzichtelijk en het modelbouwproces is nauwkeurig beschreven.	1,5
Wiskundig correct	De wiskunde bevat fouten.	Alle wiskunde is correct	… en helder opgeschreven, uitgewerkt	… en het verband met de context is toegelicht	1,5
Verslag	Verslag is incompleet, slordig opgezet of niet duidelijk	Verslag is leesbaar en compleet. Het ziet er verzorgd uit	… en het verslag is een samenhangend verhaal met een logische opbouw. De taal is correct	…en het verslag kan zonder de opdracht te kennen door iemand met wiskundekennis op VWO-D niveau begrepen worden.	1,5
Werkhouding en samenwerking	Een van beide leerlingen is met andere dingen bezig terwijl de ander hard aan het werk is. Huiswerk is geen van de keren (thuis) gedaan.	Beide zijn gedurende de eindopdracht betrokken. Huiswerk is een enkele keer niet gedaan.	Beide zijn gedurende de lessen betrokken. Huiswerk is altijd gedaan.	Beide leerlingen doen actief mee gedurende alle opdrachten en huiswerk is altijd gemaakt. Er is continu overleg tussen de twee leerlingen	1
Reflectie	Niet gedaan	Gedaan in een paar zinnen.	Gedaan en de beschrijving van zowel het geleerde als de samenwerking is helder.	Gedaan en beschrijving van het geleerde en de samenwerking is helder. Bevat persoonlijke verbeterpunten.	0.5
Totaal					10

HANDLEIDING MODEL EDITOR

Het gebruik van SCYDynamics

Om het experiment te kunnen doorlopen, moet je je eerst met het modeleer programma SCYDynamics bekend maken. Deze handleiding laat je zien hoe het programma werkt, zodat je daarna met het experiment aan de slag kan gaan.

1. EEN MODEL MAKEN EN GEBRUIKEN

Door deze handleiding leer je werken met de Model Editor programma SCYDynamics. Het programma wordt stap-voor-stap uitgelegd aan de hand van het volgende voorbeeld.

VOORBEELD

Je wilt een DVD recorder kopen. Die kost €275,= Je opent een bankrekening en stort hierop elke maand je zakgeld (€40,=). Wanneer heb je genoeg gespaard om de DVD recorder te kopen?

Dit voorbeeld lijkt erg eenvoudig: na 7 maanden heb je €280,= gespaard. Maar dan houd je geen rekening met de uitgaven en daardoor wordt het dan al snel complexer. Het maken van een model kan je helpen te voorspellen wanneer je de DVD recorder kunt kopen.

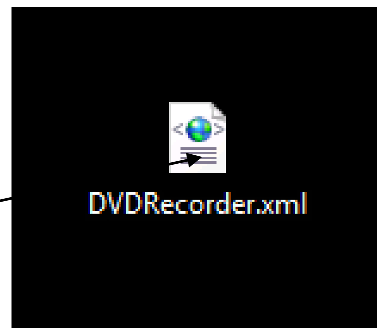
Het programma openen

Ga naar de SCYDynamics part van de modeldrawing.eu web site door op het volgende link te klikken, http://modeldrawing.eu/our-software/scydynamics/. Klik daarna op het plaatje van het programma om de web start via Java te activeren.

Een model openen

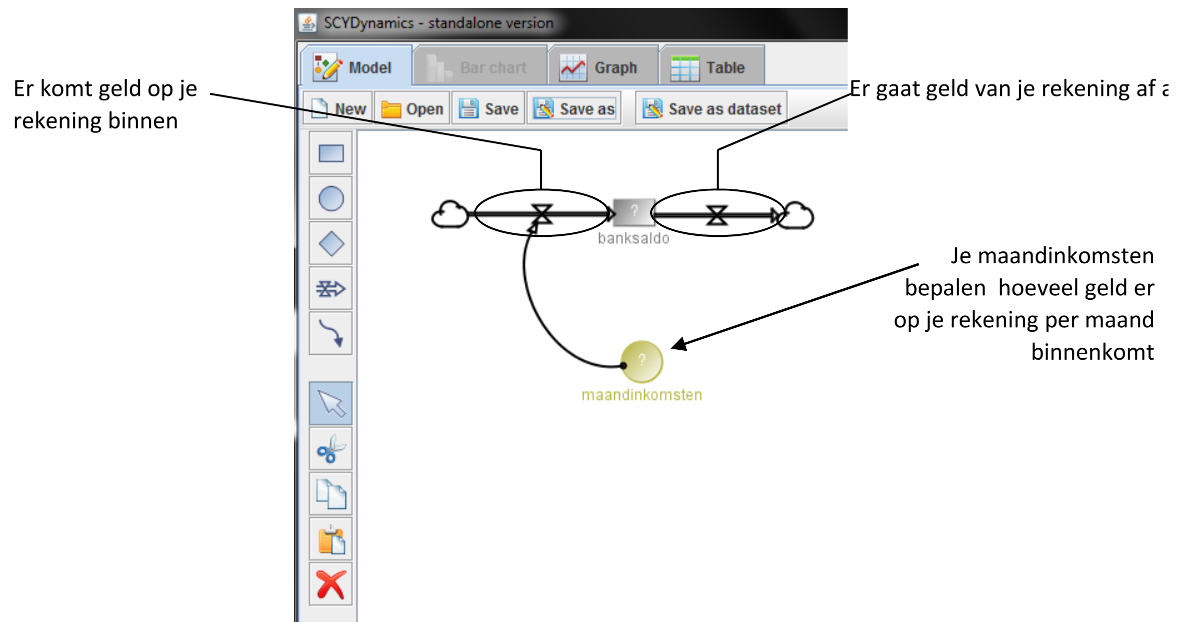
1. Om het voorbeeld model te openen klik op Open

2. En selecteer van het bureaublad het bestand "DVDRecorder"



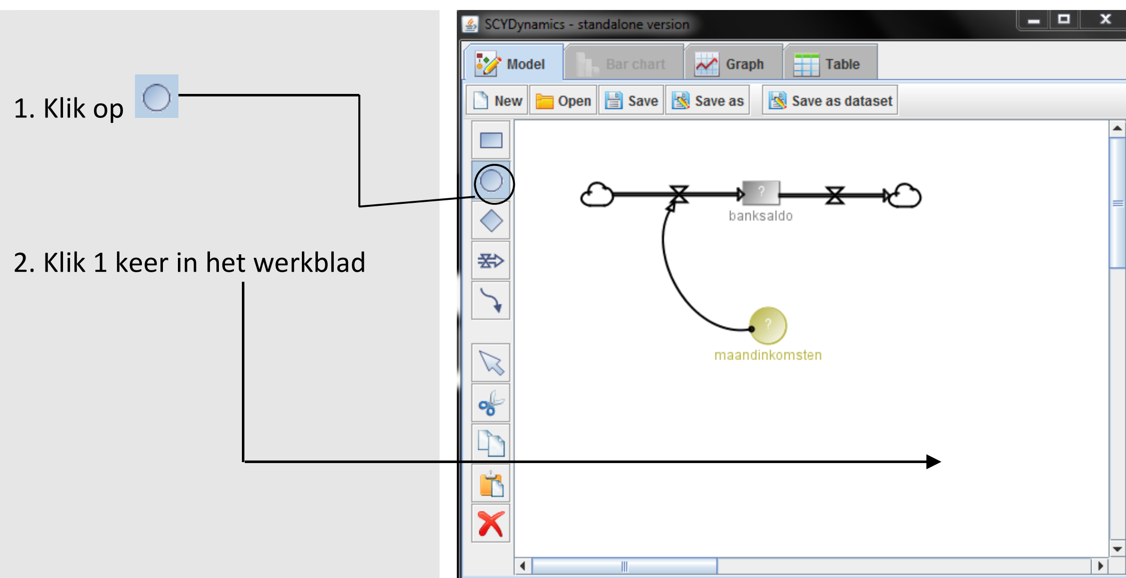
Een model begrijpen

Je ziet een eenvoudig model van je bankrekening. De betekenis van de onderdelen staat hieronder.



Een nieuwe variabele maken

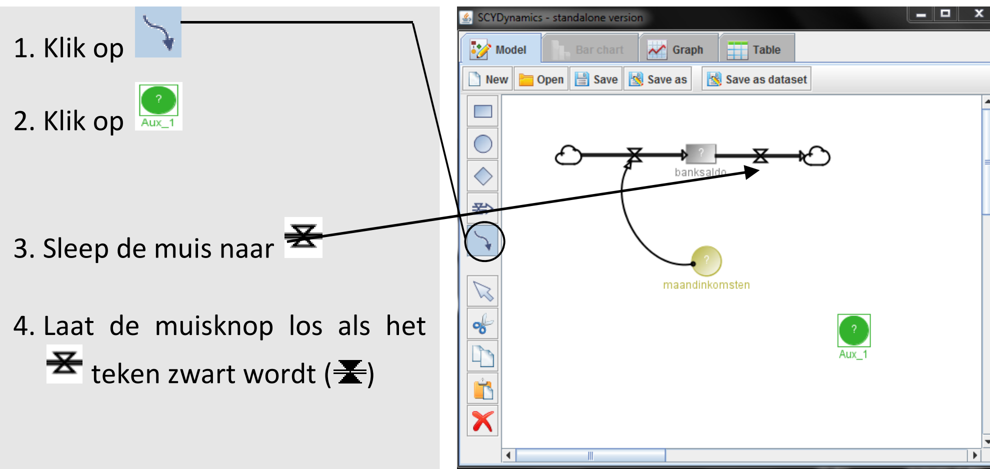
In het voorbeeld wordt niets gezegd over uitgaven. Maar die hebben wel invloed op je banksaldo. Je moet de uitgaven dus ook in het model opnemen. Hiervoor moet je eerst een nieuwe variabele maken.



TIP Je kunt de variabele verwijderen door eerst op ❌ te klikken en daarna op Aux_1

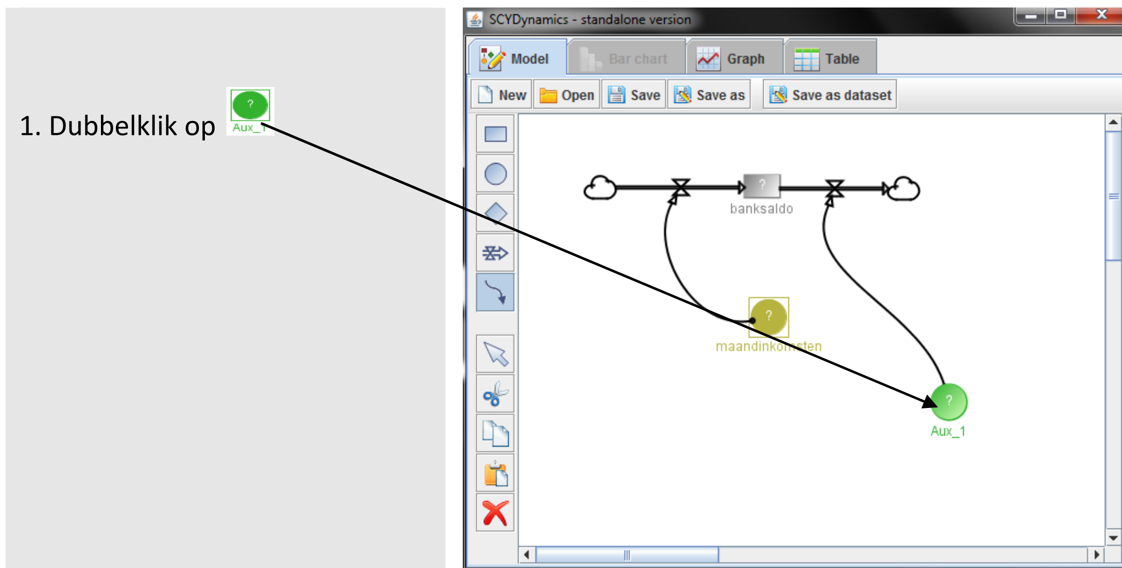
Een relatie toevoegen

Je kunt nu aangeven dat de nieuwe variabele invloed heeft op het geld dat van je bankrekening afgaat. Dit doe je door een relatie toe te voegen.



Een variabele definiëren

Je kunt nu de naam en de waarde van de nieuwe variabele instellen.



Er verschijnt een apart window. Hier kun je de instellingen van de variabele definiëren.

2. Verander de naam van de variabele in “Maanduitgaven”

3. Vul de eenheid in (je kunt uit de lijst kiezen of zelf iets invullen)

4. Verander de waarde van de variabele in 25

5. Klik op Ok

Je hebt nu de variabele Maanduitgaven aan het model toegevoegd. Je hebt de hoogte van de maanduitgaven op €25,= gezet en aangegeven dat dit bedrag maandelijks van je bankrekening afgaat.

De definitie van een variabele veranderen

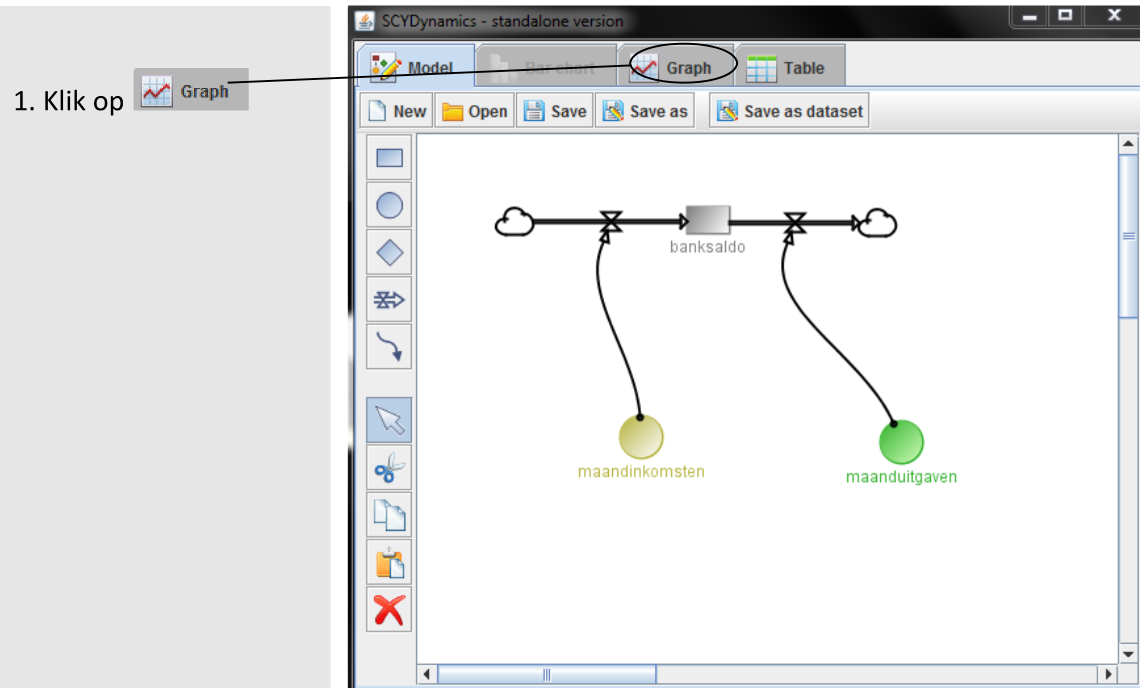
1. Klik in het model op



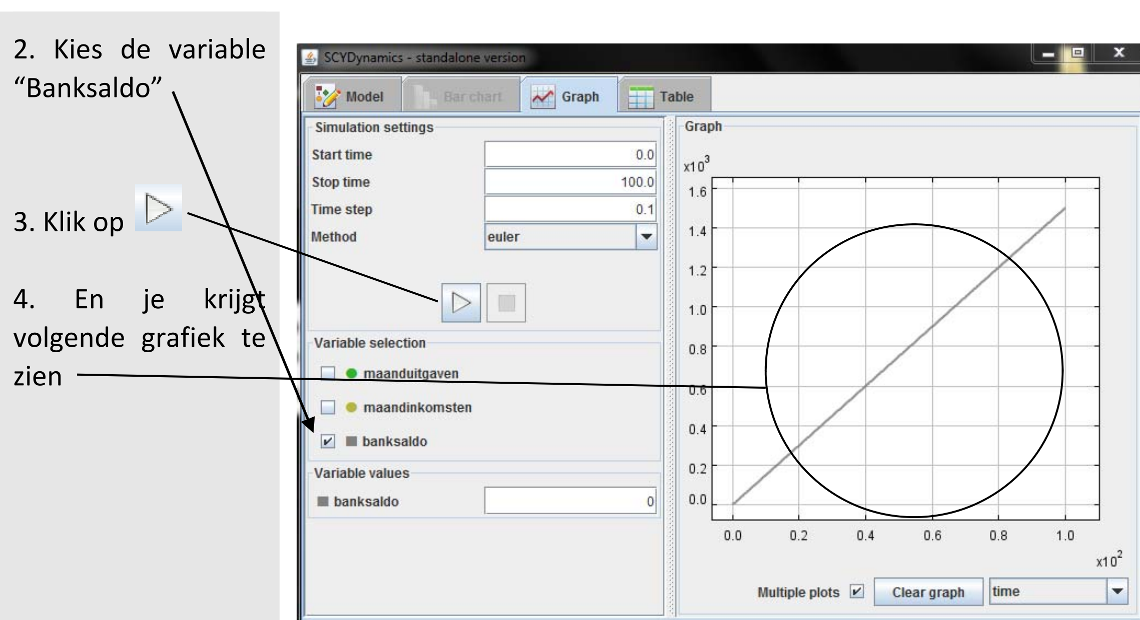
2. Verander de waarde van de variabele in 0

3. Klik op Ok

Een model runnen en de resultaten bekijken



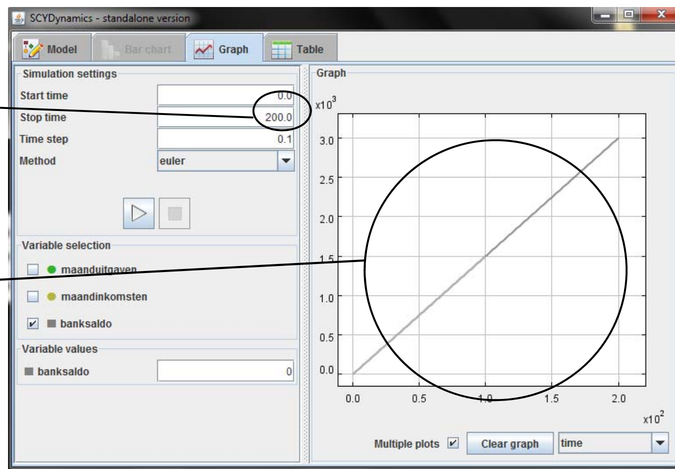
Je komt in een tab terecht waar je een grafiek van je resultaten kunt maken en het model runnen.



In de grafiek zie je hoe het banksaldo met de tijd toeneemt. Na 10 maanden heb je €150,= gespaard. Dat is nog niet genoeg om de DVD speler te kopen, dus moet je de looptijd van het model uitbreiden.

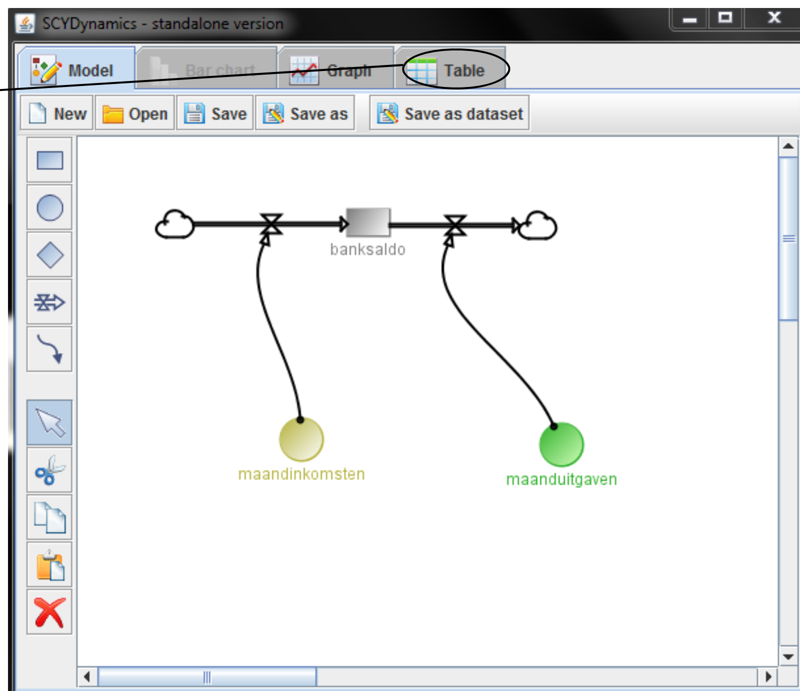
5. Verander de “stop time” naar 200.0

6. En run het model nog een keer om deze uitvoer te krijgen



In de grafiek kun je zien dat er na 20 maanden €300,= op je rekening staat. Als je precies wilt weten na hoeveel maanden je de benodigde €275,= hebt, kun je de tabel openen.

1. Kies in de menubalk voor Table

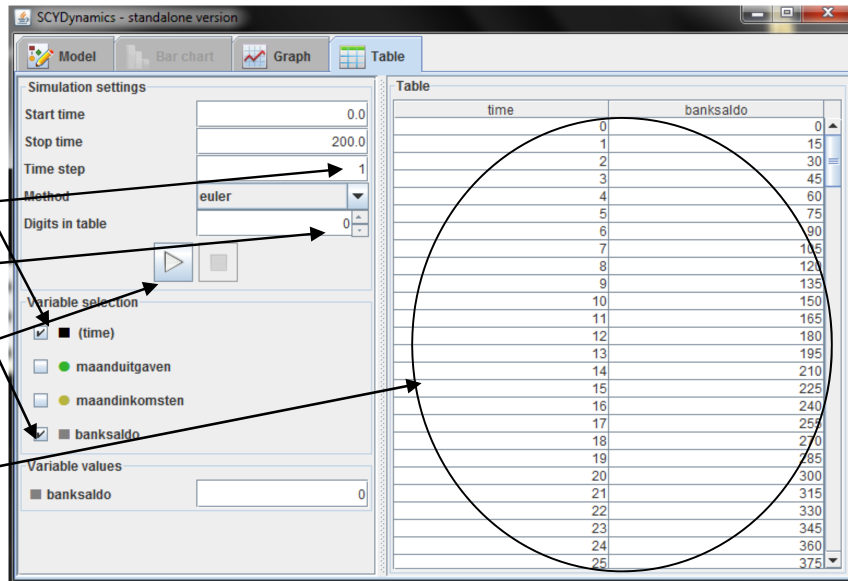


Je komt in een tab terecht waar je een grafiek van je resultaten kunt maken en het model runnen.

1. Kies voor de variablen “time” en “Banksaldo”

2. Verander de “time step” naar 1 en de “digits in table” naar 0

3. En run(▷) het model om volgende tabel te krijgen

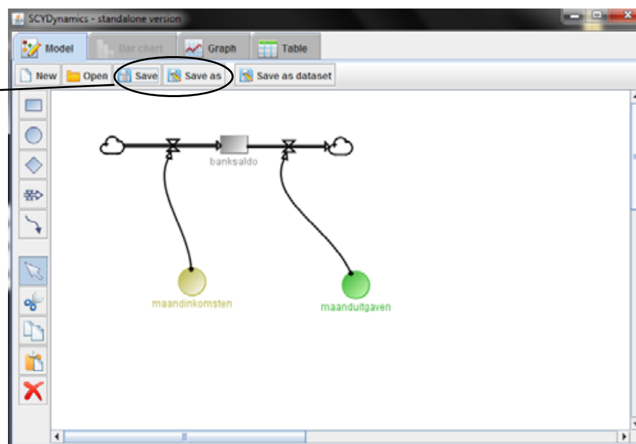


In de tabel staat dat je na 19 maanden €285,= hebt gespaard. Na meer dan anderhalf jaar heb je dus genoeg geld voor de DVD recorder.

Een model bewaren

1. Klik op Save of Save as

2. En bewaar het model onder de naam “DVDRecorder[jouw naam]”



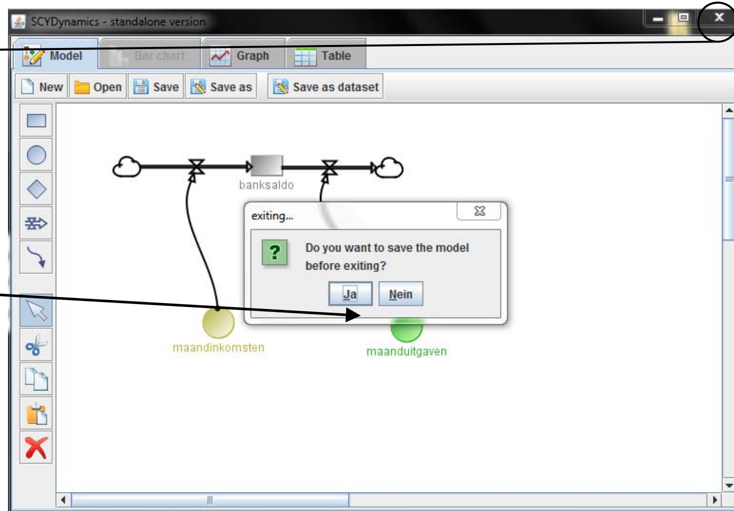
DVDRecorder.xml

All Files (*.*)

Een model sluiten

1. Klik op 

2. Klik op



2. KWALITATIEF EN KWANTITATIEF MODELEREN

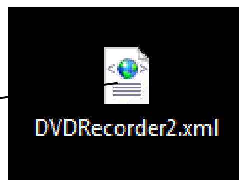
Voor het tweede deel van de handleiding wordt het voorbeeld wat uitgebreid.

VOORBEELD

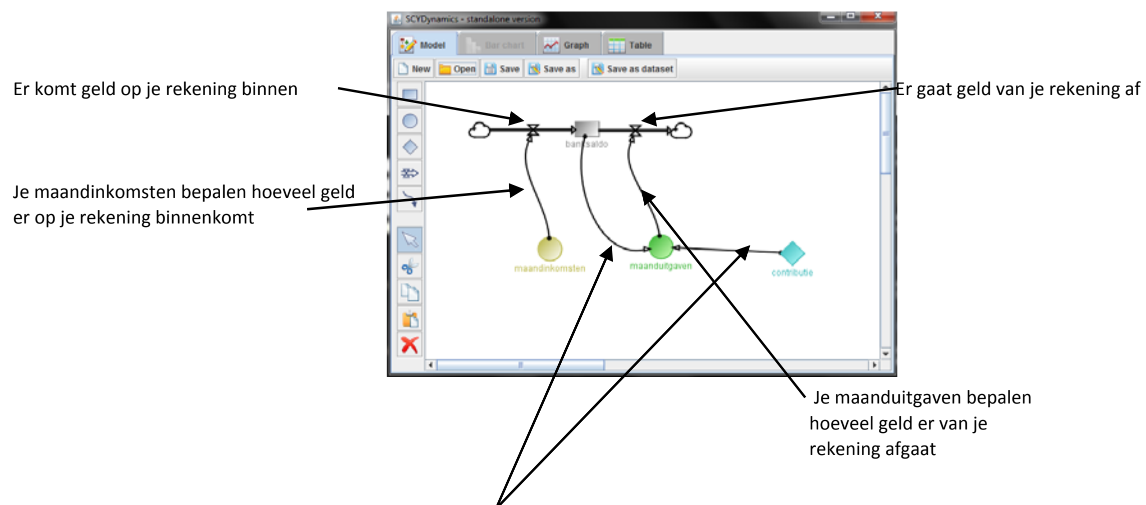
Je vindt 19 maanden sparen veel te lang en besluit een baantje in een supermarkt te nemen. Je verdient hier €35,= per week. Bovendien ben je gaan sporten; je betaalt maandelijks €30,= aan contributie voor je sportvereniging. Wanneer heb je genoeg gespaard voor de DVD recorder?

Een model openen

1. Open het bestand "DVDRecorder2" van het bureaublad



Je ziet dat dit model wat ingewikkelder is. De betekenis van de onderdelen staat hieronder.



Je maanduitgaven zijn afhankelijk van de contributie en de hoogte van je banksaldo (als er veel geld op je rekening staat, geef je veel uit; als je weinig geld hebt doe je zuiniger aan)

Een model beter begrijpen

In dit model zijn drie verschillende symbolen gebruikt. Hun betekenis staat hieronder.

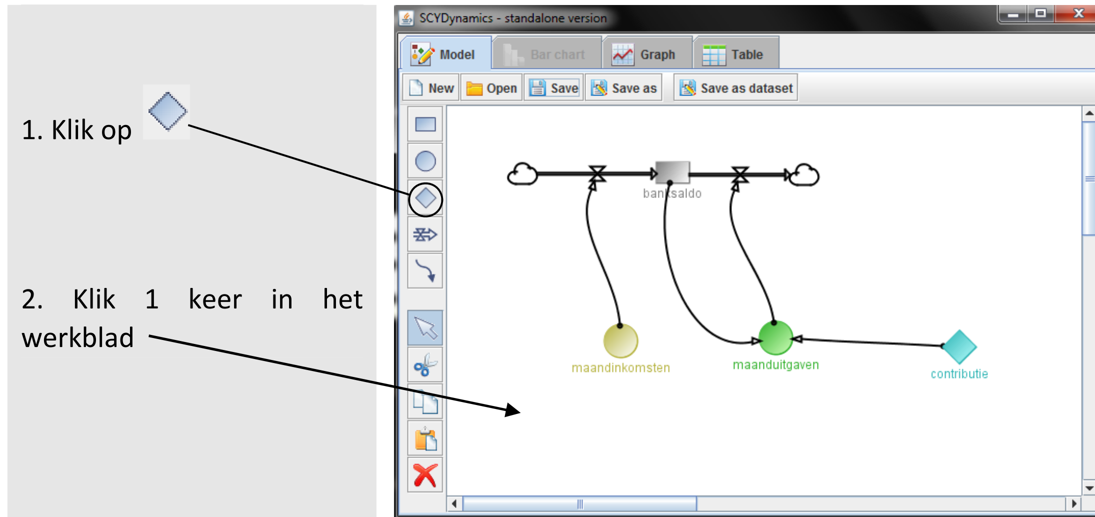
Symbool	Naam en betekenis	Voorbeeld
	Voorraadgrootheid Deze grootheid kan in de loop van de tijd van waarde veranderen. Er kan steeds iets bijkomen of iets afgaan.	Je banksaldo kan elke maand toenemen of afnemen.
	Rekengrootheid Deze grootheid wordt berekend op basis van andere grootheden.	Je maanduitgaven worden bepaald door de hoogte van je banksaldo en de contributie voor je sportvereniging
	Constante Deze grootheid verandert in de loop van de tijd niet van waarde	Contributie is elke maand gelijk (€30,=)

In het model staan ook twee soorten pijlen.

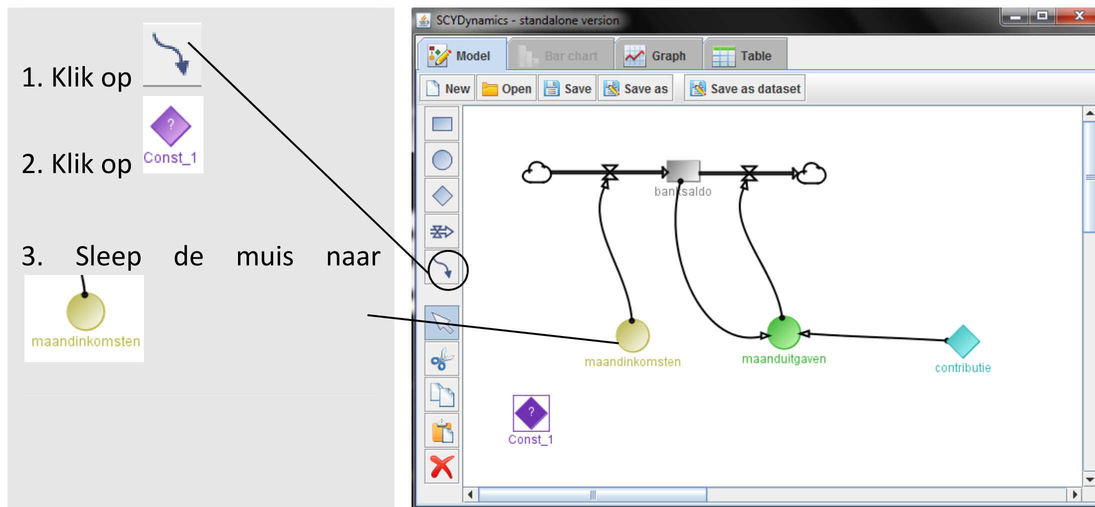
Pijl	Naam en betekenis
	Stroompijl Een stroompijl begint en/of eindigt altijd in een voorraadgrootheid. Deze pijl geeft aan dat er iets van de voorraadgrootheid af gaat of dat er iets bijkomt.
	Relatiepijl Een relatiepijl kan in twee gevallen worden gebruikt.
	<u>(1) Tussen twee symbolen</u> Een relatiepijl loopt **altijd** naar een rekengrootheid toe. De pijl begint in een andere grootheid. Dit geeft aan dat de rekengrootheid van deze andere grootheid afhankelijk is.
	<u>(2) Tussen een rekengrootheid en een stroompijl</u> De relatiepijl loopt van de rekengrootheid naar de stroompijl. Dit geeft aan dat de in- of uitstroom van deze rekengrootheid afhankelijk is.

Een constante toevoegen en definiëren

In het voorbeeld staat dat je elke week €35,= verdient in de supermarkt. Je kunt deze extra inkomsten als *constante* aan het model toevoegen (je salaris is immers elke week hetzelfde).



Je kunt nu aangeven dat de constante (je salaris) invloed heeft op je maandinkomsten. Dit doe je door een relatie toe te voegen.



Tot slot kun je de naam en de waarde van de constante definiëren

1. Dubbelklik op Const_1

2. Verander de naam in "Salaris"

3. Verander de waarde in 35

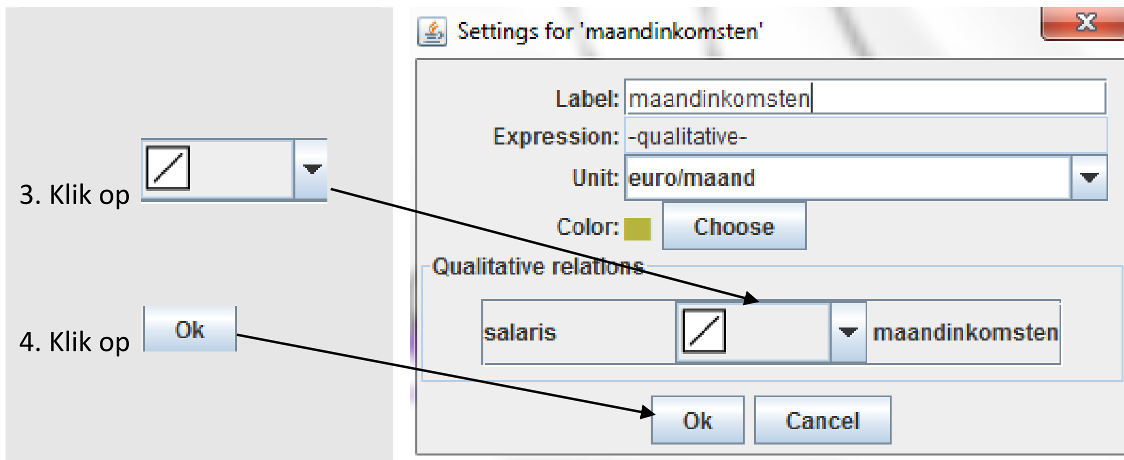
4. Klik op Ok

Een kwalitatieve relatie definiëren

Je kunt nu de relatie tussen Maandinkomsten en Salaris definiëren. Je begint eenvoudig, zonder formules. Dit heet *kwalitatief* modeleren.

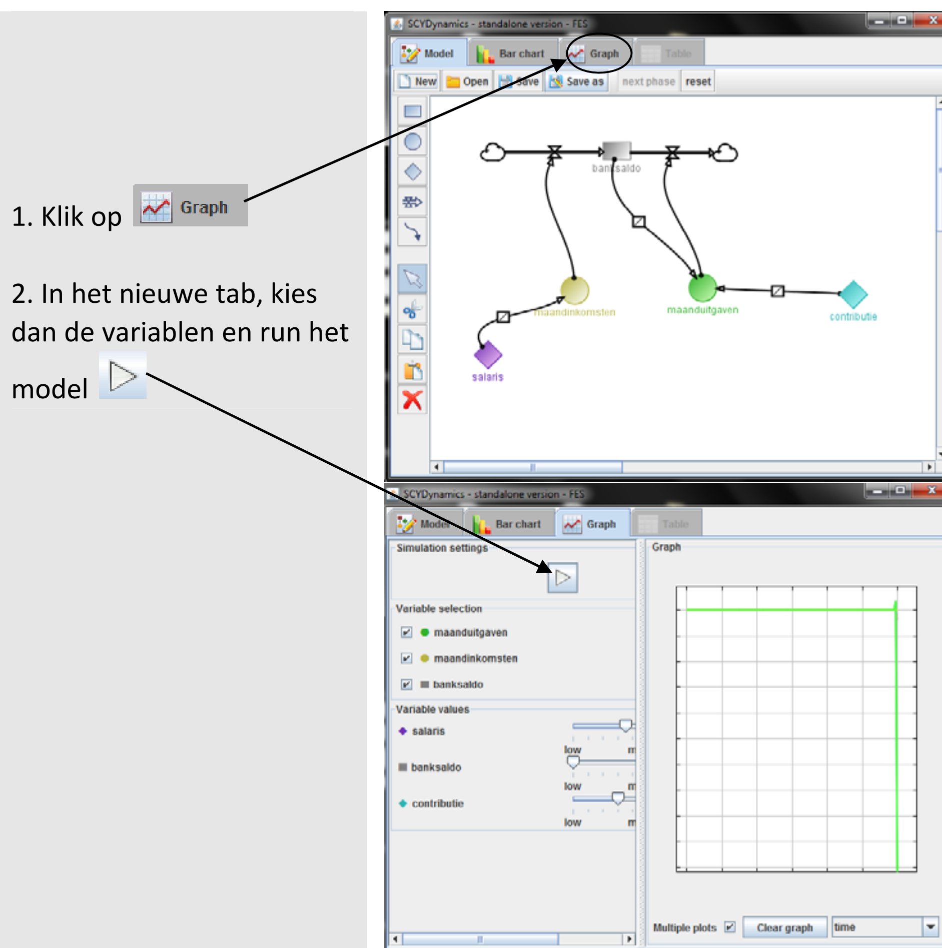
1. Om kwalitatief te kunnen modeleren klik ten eerste op next phase

2. Daarna dubbelklik op maandinkomsten



Je hebt nu de constante Salaris aan het model toegevoegd en de waarde hiervan op €35,= gezet. Met een kwalitatieve relatie heb je aangegeven dat je maandinkomsten hoger wordt als je salaris hoger wordt.

Een model runnen

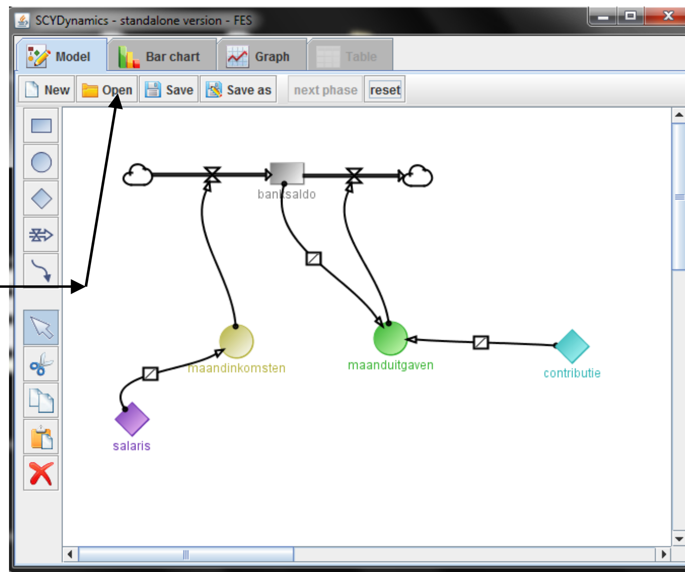


Je kunt de uitkomsten van het model in een grafiek bekijken. Hierin zie je hoe het banksaldo in de tijd verandert. Zo kun je controleren of je model globaal gezien klopt.

Een kwantitatieve relatie definiëren

Als je vindt dat het model klopt, kun je de relaties in getallen gaan uitdrukken. Dit heet *kwantitatief* modeleren.

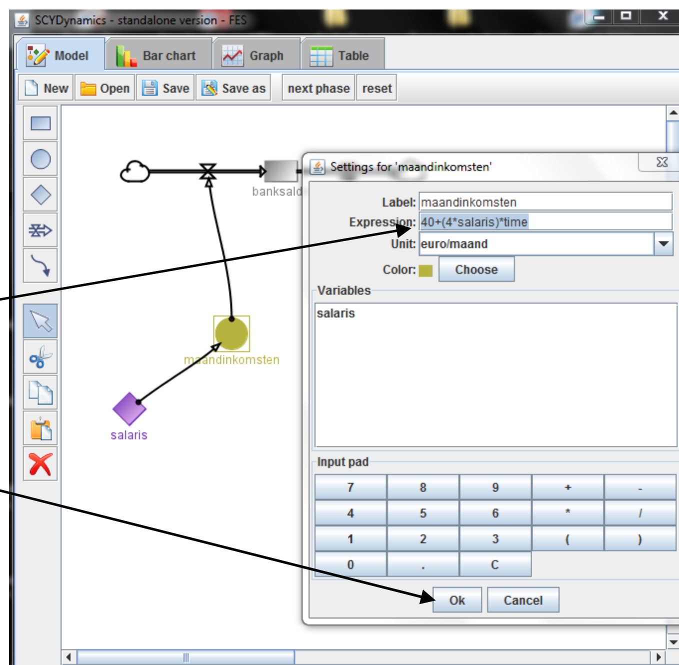
1. Om weer kwantitatief te kunnen modeleren, open een oudere versie van je model of gebruik de file “DVDRecorder3.xml” van het bureaublad



Je kunt nu de Maandinkomsten nauwkeurig specificeren. Je weet bijvoorbeeld dat je elke maand €40,= zakgeld krijgt. Je weet ook dat je elke week €35,= bijverdient. Je maandinkomsten bestaan dus uit je zakgeld van €40,= plus vier maal je weeksalaris van €35,= Dit kun je als volgt invullen.

2. Verander de expression in 40+(4*salaris)*time

3. Klik op Ok



Run daarna het model door weer in de grafiek tab op ▷ te klikken!

Uit de grafiek blijkt dat je na ongeveer een half jaar het bedrag voor de DVD recorder bij elkaar hebt gespaard. Volgende de tabel staat er na 4 maanden €281,25 op je rekening. Net genoeg voor de DVD recorder dus.

Nu ken je de belangrijkste features van SCYDynamics en kun je met het experiment beginnen! Open daarvoor de file "Handleiding modeling photosynthesis" van het bureaublad!

Bonusopdracht Differentiaalvergelijkingen

Deze huiswerkopdracht moet individueel worden gemaakt.

In totaal bestaat deze opdracht uit 2 onderdelen. Leg bij iedere vraag je antwoord uit; een antwoord alleen levert geen punten op!

Het cijfer wat je krijgt voor deze opdracht telt mee als 10% bonus; je eindtoets cijfer kan dus maximaal 1 punt hoger worden.

De uitwerkingen van deze opdracht moeten uiterlijk **aan het begin van de les op woensdag 3 april** op papier worden ingeleverd. Je mag samen aan deze opdrachten werken, maar iedereen moet zijn/haar uitwerkingen **in eigen woorden** opschrijven!

1. Bij de vier lijnelementenvelden (i), (ii), (iii) en (iv) horen vier van de zes differentiaalvergelijkingen (a),(b),(c), (d), (e) en (f). Leg uit welk lijnelementenveld bij welke differentiaalvergelijking hoort.

$$\frac{dy}{dx} = (y-1)(y-2)(y-3)$$

(a)

$$\frac{dy}{dx} = -2 - x$$

(b)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

(c)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y}{y}$$

(d)

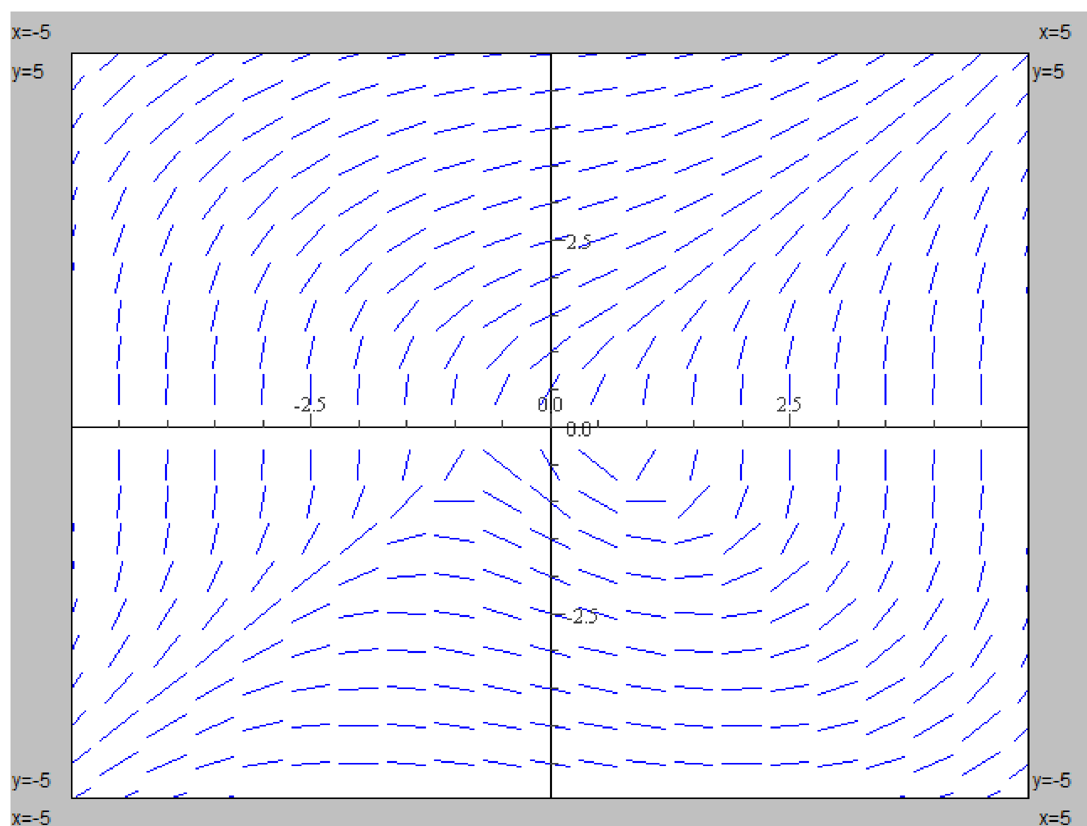
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-3}{y}$$

(e)

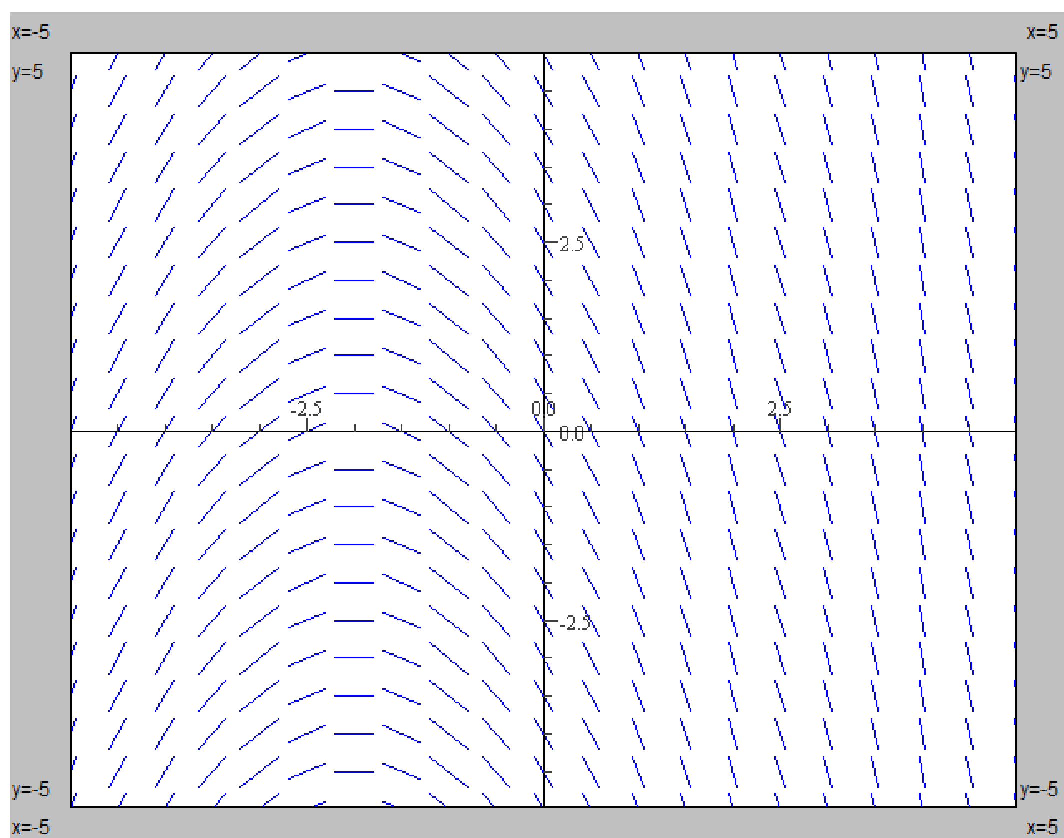
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y}{y^2}$$

(f)

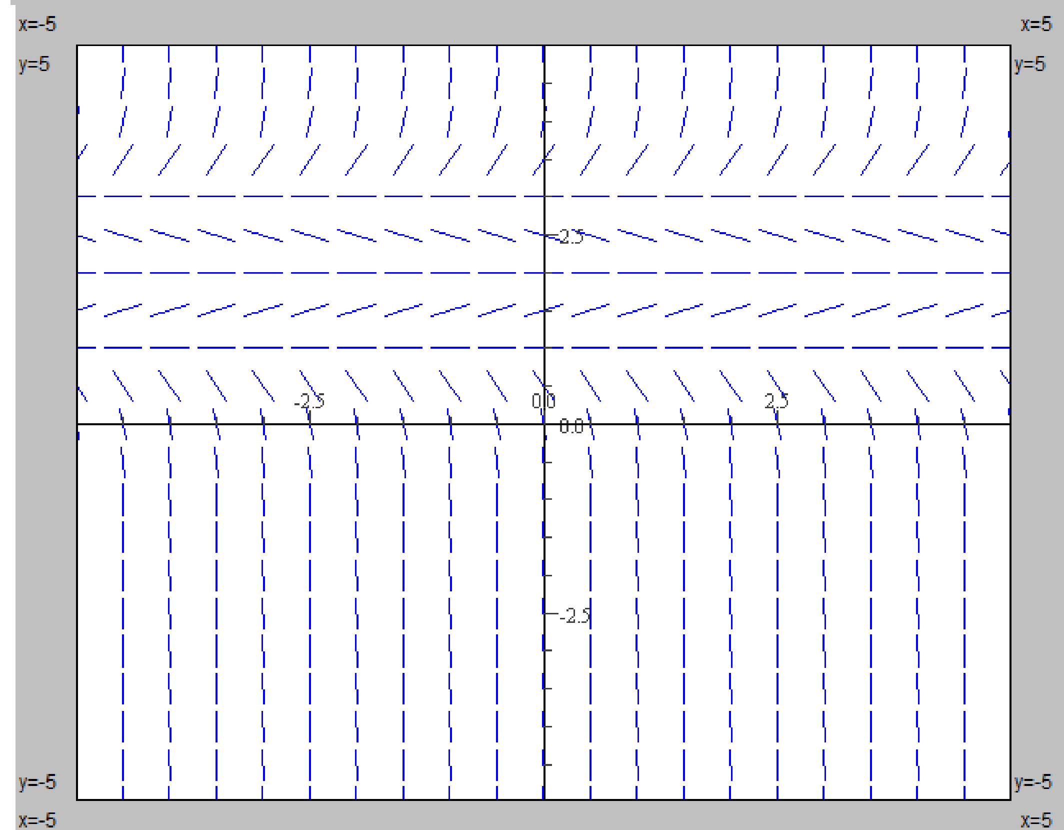
(i)



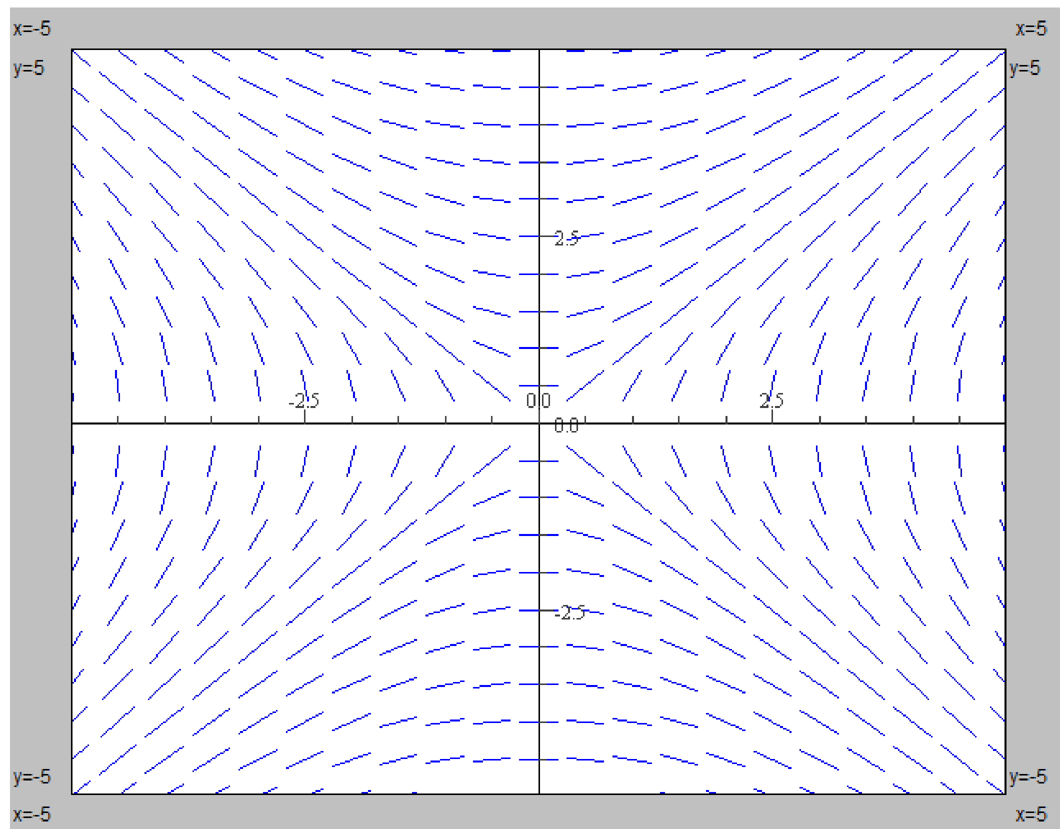
(ii)


x=-5
x=5
y=5
y=5
-2.5
0.0
2.5
0.0
2.5
-2.5
y=-5
y=-5
x=-5
x=5

(iii)


x=-5
x=5
y=5
y=5
2.5
-2.5
0.0
2.5
0.0
-2.5
y=-5
y=-5
x=-5
x=5

(iv)



2. In Nederland weegt een tram rond de 3,9 ton. Als de tram gaat rijden wordt deze vanaf het tijdstip *t=0* voortbewogen door een constante kracht van de motor. Deze kracht is gelijk aan 2200 **N**. Als de tram rijdt, ondervindt deze van de rails een wrijvingskracht $F_{wrijving}$ die evenredig is met het kwadraat van de snelheid v (in m/s) van de tram. De evenredigheidsconstante is 10 en de beginsnelheid is v(0).
   a. Stel een dynamisch model van de snelheid tram op.
   b. Stel een vergelijking op van de horizontale asymptoot.
   c. Voor welke waarden van v(0) is de snelheid van de tram stijgend?
   d. Voor welke waarden van v(0) is de snelheid van de tram dalend?
   e. Wat is de maximale snelheid van een Nederlandse tram?

   De keuze voor evenredigheidsconstante gelijk aan 10 is niet heel realistisch voor trams in België. De maximale snelheid die trams daar kunnen halen is gelijk aan 70km/u.
   f. Voor welke waarde van de evenredigheidsconstante geldt dat de maximale snelheid van de tram gelijk is aan 70km/u?

Uitwerkingen Bonusopdracht Differentiaalvergelijkingen

1. **Bij de vier lijnelementen (i),(ii),(iii) en (iv) horen vier van de zes differentiaalvergelijkingen (a),(b),(c),(d),(e) en (f). Leg uit welk lijnelementenveld bij welke differentiaalvergelijking hoort.**

$\frac{dy}{dx} = (y-1)(y-2)(y-3)$ **(a)**	$\frac{dy}{dx} = -2 - x$ **(b)**
$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ **(c)**	$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-y}{y}$ **(d)**
$\frac{dy}{dx} = \frac{x-3}{y}$ **(e)**	$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y}{y^2}$ **(f)**

Voor elk lijnelementenveld gaan we kijken naar opvallende punten.

I. In de punten $(1,-1)$, $(-1,-1)$, $(2,-4)$ en $(-2,-4)$ is het lijnelementen horizontaal. De richtingscoëfficiënt is hier gelijk aan nul,dus we hebben $\frac{dy}{dx} = 0$. We vullen het punt $(1,-1)$ in de differentiaalvergelijkingen in.

(a) $\frac{dy}{dx} = (-1-1)(-1-2)(-1-3) = (-2)(-3)(-4) = -24 \neq 0.$

(b) $\frac{dy}{dx} = -2 - 1 = -3 \neq 0.$

(c) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{-1} = -1 \neq 0.$

(d) $\frac{dy}{dx} = \frac{1^2--1}{-1} = \frac{2}{-1} = -2 \neq 0.$

(e) $\frac{dy}{dx} = \frac{1-3}{-1} = \frac{-2}{-1} = 2 \neq 0.$

(f) $\frac{dy}{dx} = \frac{1^2+-1}{(-1)^2} = \frac{0}{1} = 0.$

De enige vergelijking waarvoor geldt dat in het punt $(1,-1)$ $\frac{dy}{dx} = 0$ is vergelijking (f). Als we de andere punten invullen in (f) ($(-1,-1)$, $(2,-4)$ en $(-2,-4)$) krijgen we ook $\frac{dy}{dx} = 0$.

Dus lijnelementenveld I hoort bij differentiaalvergelijking (f): $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y}{y^2}$.

II. In dit lijnelementenveld zien we dat de richtingscoëfficiënt alleen afhangt van x. Er zal dus geen y voorkomen in de differentiaalvergelijking. Verder zien we ook dat voor $x = -2$ alle lijnelementen horizontaal zijn, dus dat voor $x = -2$ geldt $\frac{dy}{dx} = 0$.

De enige differentiaalvergelijking die hieraan voldoet is vergelijking (b) $\frac{dy}{dx} = -2 - x$. Dit is de enige vergelijking waar geen y in voorkomt. Als we $x = -2$ invullen krijgen we voor deze vergelijking $\frac{dy}{dx} = 0$.

Lijnelementenveld II hoort dus bij differentiaalvergelijking (b): $\frac{dy}{dx} = -2 - x$

III. In dit derde lijnelementenveld zien we dat de richtingscoëfficiënt onafhankelijk is van x. Er zal dus geen x voorkomen in de differentiaalvergelijking. Verder zien we duidelijk dat voor $y = 1$, $y = 2$ en $y = 3$ geldt dat alle lijnelementen horizontaal zijn, dus dat $\frac{dy}{dx} = 0$.

De enige differentiaalvergelijking waar geen x in voorkomt is vergelijking (a) $\frac{dy}{dx} = (y-1)(y-2)(y-3)$. We zien dat als we in deze vergelijking $y = 1$, $y = 2$ of $y = 3$ invullen dat we dan $\frac{dy}{dx} = 0$ krijgen.

Dus lijnelementenveld III hoort bij differentiaalvergelijking (a): $\frac{dy}{dx} = (y-1)(y-2)(y-3)$.

IV. In het laatste lijnelementenveld zien we dat voor $x = 0$ de lijnelementen horizontaal zijn. We zien ook dat op de lijn $y = x$ de richtingscoëfficiënt gelijk is aan 1. Op de lijn $y = -x$ is de richtingscoëfficiënt gelijk aan -1.
De vergelijkingen die we nog niet hebben gekoppeld zijn (c),(d) en (e). We vullen in $x = 0$. De enige vergelijking met $\frac{dy}{dx} = 0$ is vergelijking (c) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$. Als we hier $y = x$ invullen komen we uit op $\frac{dy}{dx} = 1$. Dit is de enige vergelijking waarvoor dit geldt.
Dus lijnelementenveld IV hoort bij differentiaalvergelijking (c).

Dit is slechts een mogelijke manier om de vraag op te lossen. Andere manieren zijn bijvoorbeeld het tekenen van de lijnelementenvelden bij alle differentiaalvergelijkingen of het maken van een tabel bij een aantal punten. Alle manieren kunnen tot een goed antwoord leiden.Het tekenen van alle lijnelementenvelden zal wel veel meer tijd in beslag nemen. Deze tijd heb je op je toets misschien hard nodig!

Let op: zorg dat je in je antwoord duidelijk laat zien waarom een vergelijking de enige mogelijkheid is bij een lijnelementenveld. Laat bijvoorbeeld zien dat voor een opvallend punt alleen deze vergelijking het juiste antwoord geeft!

2. **In Nederland weegt een tram rond de 3,9 ton. Als de tram gaat rijden wordt deze vanaf het tijdstip $t = 0$ voortbewogen door een constante kracht van de motor. Deze kracht is gelijk aan 2200 N. Als de tram rijdt, ondervindt deze van de rails een wrijvingskracht $F_{wrijving}$ die evenredig is met het kwadraat van de snelheid v (in m/s) van de tram. De evenredigheidsconstante is 10 en de beginsnelheid $v(0)$.**

   a. Stel een dynamisch model van de snelheid van de tram op.
   We gebruiken de tweede wet van Newton $F = ma$. We weten

$$\begin{aligned} m &= 3,9\text{ton} = 3900\text{kg} \\ F_{motor} &= 2200\text{N} \\ F_{wrijving} &= 10v^2 \end{aligned}$$

Als we dit gebruiken krijgen we

$$\begin{aligned} F_{res} &= F_{motor} - F_{wrijving} \\ &= 2200 - 10v^2 \end{aligned}$$

Verder weten we dat $a = \frac{dv}{dt}$.
Als we al onze kennis invullen in de tweede wet van Newton krijgen we:

$$\begin{aligned} F &= ma \\ F_{res} &= m\frac{dv}{dt} \\ 2200 - 10v^2 &= m\frac{dv}{dt} \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{2200 - 10v^2}{m} \end{aligned}$$

Het dynamische model voor de snelheid van de tram wordt gegeven door:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2200 - 10v^2}{m}.$$

b. Stel een vergelijking op van de horizontale asymptoot.

Voor de horizontale asymptoot geldt $\frac{dv}{dt} = 0$. Dit gaan we oplossen met het model van vraag (a).

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= 0 \\ \frac{2200 - 10v^2}{m} &= 0 \\ 2200 - 10v^2 &= 0 \\ 2200 &= 10v^2 \\ 220 &= v^2 \\ v &= \sqrt{220} \\ v &= 2\sqrt{55} \approx 14,83 \end{aligned}$$

De horizontale asymptoot wordt gegeven door $v(t) = 2\sqrt{55}$.

c. Voor welke waarden van $v(0)$ is de snelheid van de tram stijgend?

De snelheid van de tram is stijgend als $\frac{dv}{dt} > 0$. Dit kunnen we oplossen.

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &> 0 \\ \frac{2200 - 10v^2}{m} &> 0 \\ 2200 - 10v^2 &> 0 \\ 2200 &> 10v^2 \\ 220 &> v^2 \\ v &< \sqrt{220} \\ v &< 2\sqrt{55} \approx 14,83 \end{aligned}$$

Dus de snelheid van de tram is stijgend als $v(0) < 2\sqrt{55}$.

De berekening kan je ook overslaan door direct naar vraag (b) te kijken.

d. Voor welke waarden van $v(0)$ is de snelheid van de tram dalend?

De snelheid van de tram is dalend als $\frac{dv}{dt} < 0$. Dit kunnen we oplossen.

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &< 0 \\ \frac{2200 - 10v^2}{m} &< 0 \\ 2200 - 10v^2 &< 0 \\ 2200 &< 10v^2 \\ 220 &< v^2 \\ v &> \sqrt{220} \\ v &> 2\sqrt{55} \approx 14,83 \end{aligned}$$

Dus de snelheid van de tram is dalend als $v(0) > 2\sqrt{55}$.

De berekening kan je ook overslaan door direct naar vraag (b) te kijken.

e. Wat is de maximale snelheid van een Nederlandse tram?

Voor de maximale snelheid geldt dat $\frac{dv}{dt} = 0$. Dit hebben we ook al bij vraag (b) berekend.
Uit vraag (b) kunnen we dus direct concluderen dat de maximale snelheid van een Nederlandse tram gelijk is aan ongeveer 14,83 m/s.
Let op: Bij deze vraag moet je wel uitleggen waarom het 14,83 m/s is. Velen van jullie hebben simpelweg opgeschreven $v = 14,83$m/s. Dit is niet voldoende!

De keuze voor evenredigheidsconstante gelijk aan 10 is niet heel realistisch voor trams in België. De maximale snelheid die trams daar kunnen halen is gelijk aan 70km/u/.

f. Voor welke waarde van de evenredigheidsconstante geldt dat de maximale snelheid van de tram gelijk is aan 70km/u?

We weten nu niet de evenredigheidsconstante, dus we krijgen nu het volgende model:

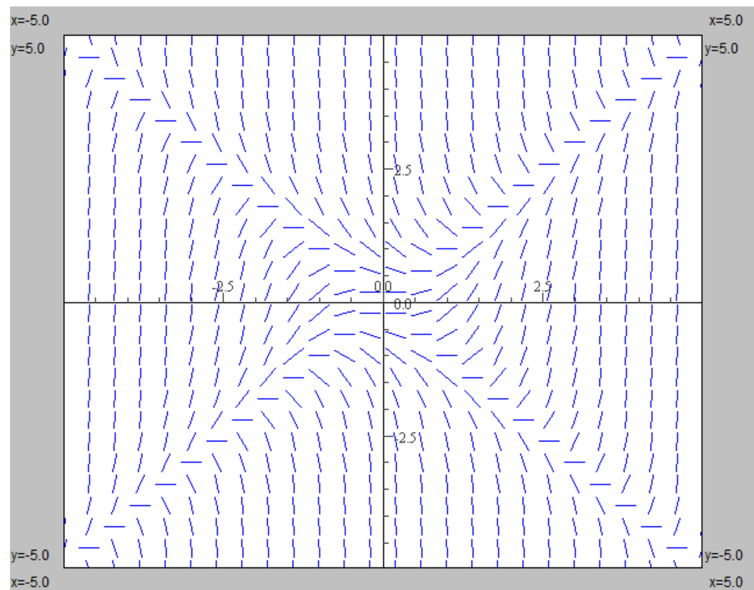
$$\frac{dv}{dt} = \frac{2200 - cv^2}{m}.$$

Voor de maximale snelheid geldt weer dat $\frac{dv}{dt} = 0$.
We weten dat de maximale snelheid van een Belgische tram gelijk is aan 70km/u. Omdat in ons model v in m/s is moeten we dit eerst omrekenen.
De maximale snelheid in m/s is $v = \frac{70}{3,6} (\approx 19,44)$m/s. Bij het invullen zullen we gebruik maken van de breuk, om afrondfouten te voorkomen.
Als we dit alles invullen in ons dynamisch model krijgen we:

$$\begin{aligned}
\frac{2200 - cv^2}{m} &= 0 \\
\frac{2200 - c\left(\frac{70}{3,6}\right)^2}{3900} &= 0 \\
2200 - c\left(\frac{70}{3,6}\right)^2 &= 0 \\
c\left(\frac{70}{3,6}\right)^2 &= 2200 \\
c &= \frac{2200}{\left(\frac{70}{3,6}\right)^2} \\
c &\approx 5,82.
\end{aligned}$$

De evenredigheidsconstante die hoort bij een maximale snelheid van 70km/u is gelijk aan $c = 5,82$.

4p Vraag 1) Gegeven zijn de volgende vier differentiaalvergelijkingen.



a) $\frac{dy}{dx} = x - y$

b) $\frac{dy}{dx} = x^2 - y$

c) $\frac{dy}{dx} = x^2 - y^2$

d) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{x^2}$

Leg uit welk van de vier differentiaalvergelijkingen bij het bovenstaande lijnelementenveld hoort.

3p Vraag 2) Los de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = \frac{0.5t}{e^{2y}}$ op met behulp van scheiden van variabelen. Schrijf de oplossing in de vorm y = …

Vraag 3) Gegeven is de volgende differentiaalvergelijking. $\frac{dy}{dt} = 3t + y + 6$.

Elke functie van de vorm $y(t) = c \cdot e^t - 3t - 9$ is een oplossing van de differentiaalvergelijking.

3p **a)** Toon dit aan.

3p **b)** Voor welke waarde van c raakt de grafiek van y de t-as?

Zie de andere kant voor opgaven 4 en 5!



Vraag 4) Een motor heeft inclusief de bestuurder een massa van 290 kg. De motor wordt voortbewogen door een constante kracht van 270 N. De luchtweerstand is $F_L = \frac{1}{9}v^2$ en de rolweerstand is $F_R = v$. Hierin zijn F_L en F_R in N en is v de snelheid in m/s.

3p **a)** Stel een dynamisch model op bij de snelheid van de motor.

3p **b)** Bereken algebraïsch de maximale snelheid. Geef het antwoord in gehele km/uur.

3p **c)** Bereken de versnelling in m/s^2 op het moment dat de snelheid 112 km/uur is. Rond af op twee decimalen.

Vraag 5) Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = \frac{y^2 - 3y}{2t}$

4p **a)** Stel een vergelijking op van de lijn *l* die de oplossingskromme door (⅖, 4) in dit punt raakt.

3p **b)** Maak een tekenoverzicht bij deze differentiaalvergelijking.

3p **c)** Leg aan de hand van het tekenoverzicht uit of er horizontale asymptoten zijn.

Succes!

32 punten totaal.

Lyceum Ypenburg

Naam: ____________________ Cijfer:

Vak: ____________________

Datum: ____________ Klas: ________

1 We zien op de lijn $y=x$ en $y=-x$ dat de $\frac{dy}{dx}=0$.

Voor $y=x$.

a) $\frac{dy}{dx} = x - x = 0$

b) $\frac{dy}{dx} = x^2 - x \neq 0$

c) $\frac{dy}{dx} = x^2 - x^2 = 0$

d) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - x^2}{x^2} = 0$

Dus (b) valt al af. (1)

Voor $y=-x$

a) $\frac{dy}{dx} = x - -x = 2x \neq 0$

c) $\frac{dy}{dx} = x^2 - (-x)^2 = 0$

d) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - (-x)^2}{x^2} = 0$

Dus (a) valt af. (1)

Voor $y=1$ zien we dat als x stijgt (en groter is dan 1) de ~~stijgt~~ steeds stijler wordt, en meteen groter is dan 1

Voor $y=1$ (1)

x	1	2	3	4	5
(c)	0	3			
(d)	0	3/4			

⇒ Het is dus (c). (1)

2 $\frac{dy}{dx} = \frac{0{,}5t}{e^{2y}}$

$e^{2y}\,dy = 0{,}5t\,dt$

$\int e^{2y}\,dy = \int 0{,}5t\,dt$ (1)

$\frac{1}{2}e^{2y} = \frac{1}{4}t^2 + c$ (1)

$e^{2y} = \frac{1}{2}t^2 + 2c$

$2y = \ln(\frac{1}{2}t^2 + 2c)$

$y = \frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2}t^2 + 2c)$ (1)

3 $\frac{dy}{dt} = 3t + y + 6$

a) $y(t) = c \cdot e^t - 3t - 9$ is een oplossing van de DV als bij substitutie de uitkomst waar is voor alle t. 8

Invullen geeft: (1)

$ce^t - 3 = 3t + ce^t - 3t - 9 + 6$ (1)

$ce^t - 3 = ce^t - 3.$ (1)

Dit klopt voor alle t, dus de functie is een oplossing.

b) Raakt de t-as als $y=0$ en $\frac{dy}{dt}=0$. (1)

$y=0 \wedge \frac{dy}{dt}=0$

$y=0 \wedge 3t+y+6=0$

$y=0 \wedge 3t+6=0$

$3t=-6 \Rightarrow t=-2$ (1)

Nu vullen we $y=0$ en $t=-2$ in en vinden we zo c

$0 = ce^{-2} - 3\cdot -2 - 9 = ce^{-2} + 6 - 9$

$0 = ce^{-2} - 3 \Rightarrow ce^{-2} = 3$

$c = 3e^2.$ (1)

Voor $c = 3e^2$ raakt $y(t) = ce^t - 3t - 9$ de t-as.

Lyceum Ypenburg

Naam: ______ Cijfer:

Vak: ______

Datum: ______ Klas: ______

4 $m = 290$ kg

$F_{motor} = 270$ N

$F_L = \frac{1}{9}v^2$

$F_R = v$

a $F = m \cdot a$ * (1)

$F_{res} = F_{motor} - F_L - F_R$ (1)

$= 270 - \frac{1}{9}v^2 - v$

$a = \frac{dv}{dt}$ *

$\frac{dv}{dt} = \frac{270 - \frac{1}{9}v^2 - v}{290}$ (1)

b maximale snelheid als $\frac{dv}{dt} = 0$. (1)

$\frac{dv}{dt} = 0$

$\frac{270 - \frac{1}{9}v^2 - v}{290} = 0$

$270 - \frac{1}{9}v^2 - v = 0$ } (1)

$-\frac{1}{9}v^2 - v + 270 = 0$

$\frac{1}{9}v^2 + v - 270 = 0$ of oplossen met

2230

$v^2 + 9v - 270 \cdot 9 = 0$ abc-formule.

$(v - \quad)(v + \quad)$

1800
630
2230

(1)

$v = \ldots$

c) $v = 112$ km/u $= \frac{112}{3,6}$ m/s (1)

$\frac{dv}{dt}$ is de versnelling (1)

$\frac{dv}{dt} = \frac{270 - \frac{1}{9}(\frac{112}{3,6})^2 - (\frac{112}{3,6})}{290} = \ldots$ (1)

5 $\frac{dy}{dt} = \frac{y^2-3y}{2t} = \frac{y(y-3)}{2t}$

a $l: at+b$ (1)

Door $(2/5, 4)$ dus

$a = \left[\frac{dy}{dt}\right]_{(2/5,4)} = \frac{16-12}{4/5} = \frac{4}{4/5} = 4 \cdot \frac{5}{4} = 5.$ (1)

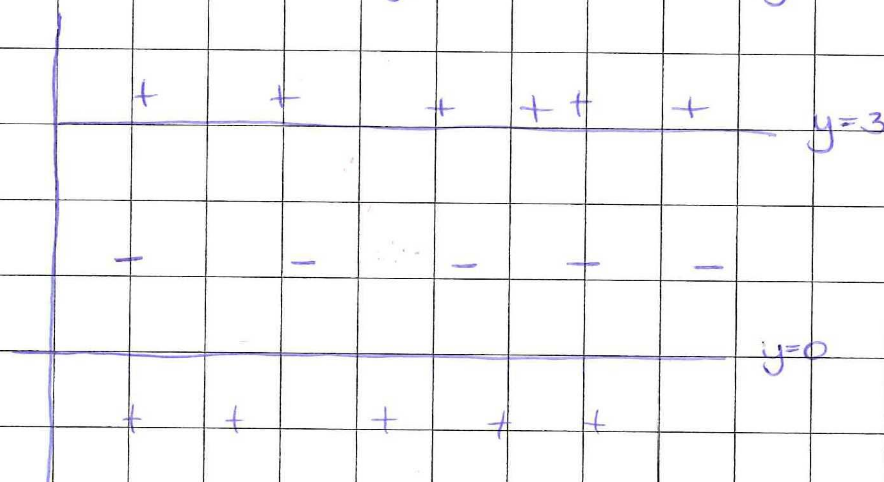
l door $(2/5, 4)$ dus

$4 = 5 \cdot 2/5 + b$ (1)

$4 = 2 + b \Rightarrow b = 2.$

$l: 5t+2.$ (1)

b $\frac{dy}{dt} = 0$ voor $y=3$ en voor $y=0$ (1)



Voor $y=2$ $\frac{dy}{dt} = \frac{4-6}{2t} < 0$ voor $t>0$. (1)

Voor $y>3$ $\frac{dy}{dt} > 0$

Voor $y<0$ $\frac{dy}{dt} > 0$ (1)

c) $y=0$ is een asymptoot. (1)

Als je begint onder $y=0$ is $\frac{dy}{dt} > 0 \Rightarrow$ je zal stijgen tot $y=0$. (1) Als $3>y>0$ dan zal je dalen $(\frac{dy}{dt} < 0)$ naar $y=0$. (1)

Beoordelingscriteria Praktische Opdracht Differentiaalvergelijkingen

	Onvoldoende	Voldoende	Goed	Uitstekend	Max. punten
Probleembeschrijving	Er is niet omschreven wat het doel is.	Het doel is letterlijk overgenomen uit de opdracht.	Het doel is in eigen woorden geformuleerd	… en waarom er een nieuw model nodig is.	1
Uitwerking opdrachten 1 - 10	Opdrachten zijn niet of niet volledig uitgewerkt.	Opdrachten uitgewerkt en letterlijk opgenomen in het verslag.	Opdrachten zijn zo volledig mogelijk uitgewerkt en vormen een geheel dat te begrijpen is zonder dat je de opdrachten kent.	Opdrachten zijn zodanig verwerkt in het verslag dat ze niet meer als opdrachten te herkennen zijn: Het is een vloeiend geheel.	3
Modellen bouwen	Het model is erg onoverzichtelijk. Het is niet snel te zien welke pijl naar welk object gaat. Uitleg modelbouwproces ontbreekt.	Model is enigszins overzichtelijk en het modelbouwproces is in globale lijnen omschreven.	Model is overzichtelijk en het modelbouwproces is in globale lijnen omschreven.	Model is overzichtelijk en het modelbouwproces is nauwkeurig beschreven.	1,5
Wiskundig correct	De wiskunde bevat fouten.	Alle wiskunde is correct	… en helder opgeschreven, uitgewerkt	… en het verband met de context is toegelicht	1,5
Verslag	Verslag is incompleet, slordig opgezet of niet duidelijk	Verslag is leesbaar en compleet. Het ziet er verzorgd uit	… en het verslag is een samenhangend verhaal met een logische opbouw. De taal is correct	…en het verslag kan zonder de opdracht te kennen door iemand met wiskundekennis op VWO-D niveau begrepen worden.	1,5
Werkhouding en samenwerking	Een van beide leerlingen is met andere dingen bezig terwijl de ander hard aan het werk is. Huiswerk is geen van de keren (thuis) gedaan.	Beide zijn gedurende de eindopdracht betrokken. Huiswerk is een enkele keer niet gedaan.	Beide zijn gedurende de lessen betrokken. Huiswerk is altijd gedaan.	Beide leerlingen doen actief mee gedurende alle opdrachten en huiswerk is altijd gemaakt. Er is continu overleg tussen de twee leerlingen	1
Reflectie	Niet gedaan	Gedaan in een paar zinnen.	Gedaan en de beschrijving van zowel het geleerde als de samenwerking is helder.	Gedaan en beschrijving van het geleerde en de samenwerking is helder. Bevat persoonlijke verbeterpunten.	0.5
Totaal					10

Enquête Voorkennis

Voordat we gaan beginnen met de lessenserie willen we eerst jullie voorkennis over bepaalde punten bepalen. De enquête bestaat uit 8 vragen. Beantwoord deze vragen serieus. Als je de enquête af hebt leg deze dan op de hoek van je tafel dan wordt deze vanzelf opgehaald.

1. Weet je wat een differentiaalvergelijking is?

___

___

___

2. Zo ja, kun je kort uitleggen wat het is?
   Zo nee, wat denk je dat het is?

___

___

___

3. Waar denk jij dat differentiaalvergelijkingen voor worden gebruikt?

___

___

___

4. Wat denk je dat een wiskundig model is?

___

___

___

5. Waar denk je dat wiskundige modellen voor worden gebruikt?

___

___

___

6. Welke stappen denk jij dat er in het opstellen van een wiskundig model genomen worden?

___

___

___

7. Heb jij wel eens computerprogramma's gebruikt (bijvoorbeeld bij natuurkunde, biologie of wiskunde) om een situatie te analyseren? Zo ja, welke?

____

____

____

8. Wat heb je met bovenstaande programma's moeten doen (leg kort uit)?

____

____

____

____

____

Enquête Praktische Opdracht

Deze enquête zullen wij gebruiken voor het onderzoek dat wij doen naar de lessenserie over differentiaalvergelijkingen. De enquête is volledig anoniem en zal op geen enkele manier tegen jullie worden gebruikt. Wij vragen hier enkel naar jullie mening en vragen jullie dan ook de vragen volledig naar waarheid in te vullen. Merk op dat er hier geen goede of foute antwoorden zijn.

Deze enquête bestaat uit 2 delen. Eén deel gaat over de praktische opdracht en één over de docenten.

De inhoud en uitvoering van de Praktische Opdracht
Geef hieronder je mening over de praktische opdracht van de afgelopen week.

	Helemaal mee oneens	Mee oneens	Geen mening	Mee eens	Helemaal mee eens
1. Het introductievoorbeeld het lekkende zwembad was interessant.	O	O	O	O	O
2. De worksheet van introductievoorbeeld het lekkende zwembad was duidelijk.	O	O	O	O	O
3. De lessen over het ZG model en het ZGR model waren interessant.	O	O	O	O	O
4. De worksheets over het ZG model en het ZGR model waren duidelijk.	O	O	O	O	O
5. De eindopdracht was interessant.	O	O	O	O	O
6. De worksheet van de eindopdracht was duidelijk.	O	O	O	O	O
7. Het was duidelijk wat er van me verwacht werd in het verslag.	O	O	O	O	O
8. Ik vond de praktische opdracht leuk om te doen.	O	O	O	O	O
9. Ik heb het gevoel dat ik iets heb geleerd bij de praktische opdracht	O	O	O	O	O
10. Ik zou graag nog een keer zo een praktische opdracht doen.	O	O	O	O	O
11. Ik vond het leuk om in tweetallen te werken aan de praktische opdracht.	O	O	O	O	O
12. Ik kies liever zelf met wie ik een project doe.	O	O	O	O	O
13. Ik had het project liever alleen gedaan.	O	O	O	O	O
14. Ik vond het nuttig dat we per groepje huiswerkbespreking hadden.	O	O	O	O	O
15. Ik vond het prettig dat we per groepje huiswerkbespreking hadden.	O	O	O	O	O
16. Ik had liever klassikale huiswerkbespreking.	O	O	O	O	O

17. Welk cijfer zou jij de praktische opdracht geven (1 saai en slecht uitgevoerd, 10 heel interessant en goed uitgevoerd)? Omcirkel wat bij jou van toepassing is.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

18. Heb je nog opmerkingen en/of verbeterpunten over de praktische opdracht?

____

____

____

____

De docenten

Geef hieronder je mening over de docenten gebaseerd op de praktische opdracht in de afgelopen week.

	Helemaal mee oneens	Mee oneens	Geen mening	Mee eens	Helemaal mee eens
19. De uitleg van meneer van Harmelen was duidelijk.	O	O	O	O	O
20. De uitleg van meneer van Harmelen was te snel en gehaast.	O	O	O	O	O
21. Het bordgebruik van meneer van Harmelen was overzichtelijk en goed leesbaar.	O	O	O	O	O
22. Ik vond het vervelend als meneer van Harmelen ging uitleggen.	O	O	O	O	O
23. Meneer van Harmelen is een goede docent.	O	O	O	O	O
24. De individuele uitleg van meneer van Harmelen was duidelijk.	O	O	O	O	O
25. Meneer van Harmelen was tijdens het zelfstandig werken goed aanspreekbaar; ik kon hem makkelijk vragen stellen.	O	O	O	O	O
26. De uitleg van mevrouw Jagt was duidelijk.	O	O	O	O	O
27. De uitleg van mevrouw Jagt was te snel en gehaast.	O	O	O	O	O
28. Het bordgebruik van mevrouw Jagt was overzichtelijk en goed leesbaar.	O	O	O	O	O
29. Ik vond het vervelend als mevrouw Jagt ging uitleggen.	O	O	O	O	O
30. De individuele uitleg van mevrouw Jagt was duidelijk.	O	O	O	O	O

31. Mevrouw Jagt was tijdens het zelfstandig werken goed aanspreekbaar; ik kon haar makkelijk vragen stellen.	O	O	O	O	O
32. Mevrouw Jagt is een goede docent.	O	O	O	O	O
33. Ik vond het vervelend om van meneer van Harmelen én mevrouw Jagt in de zelfde les uitleg te krijgen.	O	O	O	O	O

34. Heb je nog opmerkingen of verbeterpunten voor meneer van Harmelen?

____

____

____

____

35. Heb je nog opmerkingen of verbeterpunten voor mevrouw Jagt?

____

____

____

____

Enquête Motivatie

Deze enquête zullen wij gebruiken voor het onderzoek dat wij doen naar de lessenserie over differentiaalvergelijkingen. De enquête is volledig anoniem en zal op geen enkele manier tegen jullie worden gebruikt. Wij vragen hier enkel naar jullie mening en vragen jullie dan ook de vragen volledig naar waarheid in te vullen. Merk op dat er hier geen goede of foute antwoorden zijn.

Deze enquête gaat over jullie verwachtingen van de nieuwe lesstof in de rest van deze lessenserie.

Verwachting voor de rest van de lessenserie
Geef hier je mening over jouw verwachtingen van het nieuwe deel.

	Helemaal mee oneens	Mee oneens	Geen mening	Mee eens	Helemaal mee eens
1. Ik ben benieuwd naar de rest van de lessenserie.	O	O	O	O	O
2. Ik heb zin in de rest van de lessenserie.	O	O	O	O	O
3. Ik ben meer geïnteresseerd in dit onderwerp dan in eerdere onderwerpen bij wiskunde.	O	O	O	O	O
4. Ik zie het nut in van dit onderwerp.	O	O	O	O	O
5. Dit onderwerp lijkt mij niet moeilijk.	O	O	O	O	O
6. Dit onderwerp geeft mij een beter beeld (dan eerdere onderwerpen) van wat je met wiskunde kan.	O	O	O	O	O
7. Dit is een onderwerp dat mij niet leuk genoeg lijkt om te blijven onthouden nadat de toets geweest is.	O	O	O	O	O
8. Ik denk dat de theorie lastig te begrijpen gaat zijn.	O	O	O	O	O
9. Ik denk dat de opgaven moeilijker gaan zijn dan bij voorgaande hoofdstukken.	O	O	O	O	O

10. Wat zou je graag willen leren over differentiaalvergelijkingen en modelleren?

____

____

____

____

Enquête Differentiaalvergelijkingen

Deze enquête zullen wij gebruiken voor het onderzoek dat wij doen naar de lessenserie over differentiaalvergelijkingen. De enquête is volledig anoniem en zal op geen enkele manier tegen jullie worden gebruikt. Wij vragen hier enkel naar jullie mening en vragen jullie dan ook de vragen volledig naar waarheid in te vullen. Merk op dat er hier geen goede of foute antwoorden zijn.

Deze enquête gaat over jullie wat jullie van de docenten en het onderwerp differentiaalvergelijkingen vinden

Reflectie op de lessenserie

1. Leg in minstens één zin uit wat een differentiaalvergelijking is.

   ____

   ____

   ____

2. Leg in minstens één zin uit wat je aan differentiaalvergelijkingen hebt.

   ____

   ____

   ____

Geef hier je mening over de lessenserie.

	Helemaal mee oneens	Mee oneens	Geen mening	Mee eens	Helemaal mee eens
3. Ik heb iets geleerd in de lessen.	O	O	O	O	O
4. Ik vond de lessen interessant.	O	O	O	O	O
5. Ik ben meer geïnteresseerd in dit onderwerp dan in eerdere onderwerpen bij wiskunde.	O	O	O	O	O
6. Ik zie het nut in van dit onderwerp.	O	O	O	O	O
7. Dit onderwerp vind ik moeilijk.	O	O	O	O	O
8. Dit onderwerp geeft mij een beter beeld (dan eerdere onderwerpen) van wat je met wiskunde kan.	O	O	O	O	O
9. Dit is een onderwerp dat mij leuk genoeg lijkt om te blijven onthouden nadat de toets geweest is.	O	O	O	O	O

10. Wat vond je leuk aan de lessenserie?

____

____

____

11. Wat zou anders of beter kunnen aan de lessenserie?

____

____

____

De docenten

Geef hieronder je mening over de docenten gebaseerd op de theorielessen van de afgelopen twee weken.

	Helemaal mee oneens	Mee oneens	Geen mening	Mee eens	Helemaal mee eens
1. De uitleg van meneer van Harmelen was duidelijk.	O	O	O	O	O
2. De uitleg van meneer van Harmelen was te snel en gehaast.	O	O	O	O	O
3. Het bordgebruik van meneer van Harmelen was overzichtelijk en goed leesbaar.	O	O	O	O	O
4. Ik vond het vervelend als meneer van Harmelen ging uitleggen.	O	O	O	O	O
5. Meneer van Harmelen is een goede docent.	O	O	O	O	O
6. De individuele uitleg van meneer van Harmelen was duidelijk.	O	O	O	O	O
7. Meneer van Harmelen was tijdens het zelfstandig werken goed aanspreekbaar; ik kon hem makkelijk vragen stellen.	O	O	O	O	O
8. De uitleg van mevrouw Jagt was duidelijk.	O	O	O	O	O
9. De uitleg van mevrouw Jagt was te snel en gehaast.	O	O	O	O	O
10. Het bordgebruik van mevrouw Jagt was overzichtelijk en goed leesbaar.	O	O	O	O	O
11. Ik vond het vervelend als mevrouw Jagt ging uitleggen.	O	O	O	O	O
12. De individuele uitleg van mevrouw Jagt was duidelijk.	O	O	O	O	O
13. Mevrouw Jagt was tijdens het zelfstandig werken goed aanspreekbaar; ik kon haar makkelijk vragen stellen.	O	O	O	O	O
14. Mevrouw Jagt is een goede docent.	O	O	O	O	O

15. Noem minstens één sterk punt van meneer van Harmelen.

____

____

____

____

16. Noem minstens één verbeterpunt voor meneer van Harmelen.

17. Noem minstens één sterk punt van mevrouw Jagt.

18. Noem minstens één verbeterpunt voor mevrouw Jagt.

1. Heb je je best gedaan voor de toets (en waarom)?
2. *Heeft de PO in jouw ogen nut gehad of niet (en waarom)?*
3. Wat is volgens jou de link tussen de PO en de theorielessen?
   indien geen idee: schetsen wij het idee en vragen waarom ze hier zelf niet aan hebben gedacht ofzo?
4. Bij welke vakken zou je differentiaalvergelijkingen kunnen gebruiken? (denk aan bio en natuurkunde → is dit een begripsvraag? We vragen geen voorbeelden, gewoon vakken)

Maximaal 4 vragen? Anders zit je veel te lang!